2.2 Neliöjuuri ja sitä koskevat laskusäännöt

****
MÄÄRITELMÄ 3:

Lukua b sanotaan luvun a neliöjuureksi, merkitään $\sqrt{a} = b$, jos b täyttää kaksi ehtoa:

1^o $b \geq 0$

2^o $b^2 = a$

****

Esim.1 Määritä a)$\sqrt{64}$ b)$\sqrt{0}$ c)$\sqrt{-36}$

a) Luvun 64 neliöjuuri on 8, sillä kahdeksikko täyttää kummankin määritelmässä vaaditun ehdon. Onhan se ei-negatiivinen ja toiseksi $8^2 = 64$. Huomaa, että luvun 8 vastaluku −8 ei kelpaa (vielä 60-luvulla kelpasi !) luvun 64 neliöjuureksi, sillä vaikkakin sen neliö on 64, se on negatiivinen!! Se ei täytä määritelmän ehtoa 1^o.

b) Nollan neliöjuuri on nolla, sillä nolla on ei-negatiivinen ja sen neliö on nolla.

c) Ei ole olemassa reaalilukua x, jonka neliö olisi −36. Kaikkien reaalilukujen lukujen parilliset potenssit ovat aina ei-negatiivisia.

Voidaan siis päätellä, että millä tahansa ei-negatiivisella luvulla on aina neliöjuuri. Se ei kuitenkaan ole aina kokonaisluku eikä edes rationaaliluku. Useimpien reaalilukujen neliöjuuret ovatkin **irrationaalilukuja**. Näitä ei voi esittää murtolukuina, so. kahden kokonaisluvun osamääränä. Näiden desimaaliesitys on päättymätön ja **jaksoton.** Neliöjuuria on numeerisissa tapauksissa helppo määrittää laskimella. Täytyy kuitenkin tietää ja tajuta, että jos laskimen näyttö täyttyy, kuten useimmissa tapauksissa käy, luettavissa oleva 8 – 10 numeron mittainen luku on vain etsityn neliöjuuren **likiarvo.**

Negatiivisella luvulla ei ole <u>reaalista</u> neliöjuurta.

Esim. 2 Voidaan jopa todistaa, ettei $\sqrt{2}$ ole rationaalinen. Ei siis ole olemassa sellaista murtolukua, jonka neliö olisi tasan 2. Tälle luvulle löydetään kuitenkin niin tarkkoja rationaalisia likiarvoja kuin halutaan tai jaksetaan esimerkiksi seuraavalla ns. haarukoimismenetelmällä:

Koska $1^2 = 1 < 2$ ja $2^2 = 4 > 2$, niin $1 < \sqrt{2} < 2$.

Jaetaan väli [1,2] kymmeneen yhtä suureen osaan. Jakopisteitä vastaavat luvut ovat tällöin 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 ja 2. Kun muodostetaan luettelossa esiintyvien lukujen neliöt, havaitaan, että
$1.4^2 = 1.96 < 2$, mutta että $1.5^2 = 2.25 > 2$. Siis $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.

Jaetaan väli [1.4,1.5] kymmeneen yhtä suureen osaan. Kun muodostetaan tämän jaon jakopisteitä vastaavien lukujen neliöt, havaitaan, että
$1.41^2 = 1.9881 < 2$ ja $1.42^2 = 2.0164 > 2$, joten $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.

Esitettyä menettelyä loputtomasti (?) jatkaen, saadaan jono epäyhtälöitä:

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$
$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ken kykenee saattamaan aloitetun työn loppuun, hänellä on päättymätön desimaaliluku, joka esittää lukua $\sqrt{2}$.

Huom.! Kun on määrättävä sellaisen neliön sivu, jonka pinta-ala A = 2, niin sivun s **tarkka arvo** $s = \sqrt{2}$, ja sivun s **likiarvo** $s \approx 1.41$. Nämä nimitystavat on tarkoin erotettava toisistaan.

Esim. 3 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 6 ja toisen kateetin pituus 2. Laskettava kolmion ala.

Merkitään toista, tuntematonta kateettia AB = h. Pythagoraan lauseen mukaan

$$2^2 + h^2 = 6^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 - 4 \Leftrightarrow h^2 = 32$$

Tämä yhtälö on h:n suhteen toista astetta. Sellaisia lukuja, jotka toteuttavat tämän yhtälön, ovat $\sqrt{32}$ ja tämän vastaluku $-\sqrt{32}$. Näistä vain edellinen positiivisena kelpaa janan pituudeksi, joten h = $\sqrt{32}$, ja kun suorakulmaisen kolmion ala A on kateettien tulon puolikas, niin

A = ½·2·$\sqrt{32} = \sqrt{32}$ (tarkka arvo) = 5.65685... ≈ 5.66 (likiarvo).

Sellaisia neliöjuuria, joilla on sama juurrettava, sanotaan samanmuotoisiksi. Vastaava termi saattaa olla jo polynomilaskennasta tuttu: samanmuotoisia olivat polynomin termit, jotka erosivat toisistaan enintään kertoimiensa puolesta. Tämä neliöjuurten samanmuotoisuus tavallaan vastaa aikaisempaa samanmuotoisuuden käsitettä, mikä asia tullaan syvällisemmin huomaamaan murtopotenssin yhteydessä. Neliöjuuri nimittäin tarkoittaa luvun korottamista potenssiin ½. Sama juurrettava vastaa samaa kantalukua, ja kun puhutaan neliöjuurista, tällöin on eksponenttikin sama.

Samanmuotoisia neliöjuuria voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan.

Esim. 4 Neliöjuurista $\sqrt{8},\ 3\sqrt{8},\ -9½\sqrt{8},\ 13\sqrt{13},\ 2238\sqrt{13}$ ja $(k^2+1)\sqrt{13}$ kolme ensiksi mainittua ovat samanmuotoisia keskenään, samoin kolme viimeksi mainittua.

Esim. 5

a) $8\sqrt{3}+2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}+7\sqrt{2}+6\sqrt{5}-3\sqrt{2}=7\sqrt{5}+4\sqrt{2}$

c) $10-\sqrt{13}+5-3\sqrt{13}=15-4\sqrt{13}$

ANKARA VAROITUS:

$$\sqrt{a+b} \quad \text{EI OLE} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Varoitus on tarpeellinen, sillä tulosta ja osamäärästä voidaan neliöjuuri ottaa seuraavan lauseen antamin ohjein:
****

Lause 10: Tulon neliöjuuri = tekijäin neliöjuurien tulo eli

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

Osamäärän neliöjuuri = jaettavan ja jakajan neliöjuurien osamäärä eli

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

****

Tod.: Olkoot $a \geq 0$ ja $b \geq 0$. Tällöin $\sqrt{a} \geq 0$ ja $\sqrt{b} \geq 0$ joten $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ ja

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Osamäärän neliöjuurta koskeva kohta todistetaan vastaavasti. Siinä on vain huomattava, että oletuksessa on oltava ehto $b > 0$. Minkähän takia?

Neliöjuuria sievennettäessä niitä voidaan käsitellä kuin polynomin termejä. Näissä yhteyksissä joudutaan usein käyttämään lausetta 10 ja samanmuotoisten termien yhdistämistä.

Tarkasteltaessa neliöjuuren eri esitysmuotoja sitä pidetään yleensä sievimpänä silloin, kun sen juurrettava on mahdollisimman pieni kokonaisluku. Jos sievennyksessä päädytään rationaaliseen juurrettavaan, käytetään lauseen 10 jälkimmäistä kohtaa ja tämän lisäksi lavennetaan saatua juurilauseketta niin, ettei sen nimittäjä sisällä juuria. Tämän tempun oppiminen saattaa tosin siirtyä myöhempään ajankohtaan taitojen kasvaessa ja tiedon lisääntyessä.

Jos vielä joudutaan ottamaan kirjainlausekkeista neliöjuuria, on ehdottomasti muistettava, että juuren tulee olla ei-negatiivinen. Tällöin joudutaan useimmiten viljelemään itseisarvoja, joista kaikki ennen pitkää oppivat pitämään. Tosin itseisarvoon syvennytään paremmin vasta kurssissa MAA4.

Esim. 6

a) $\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$

b) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4.$ (Huom. juuria ei esiinny)

Esim. 7 Ratkaise yhtälö $x\sqrt{2}=6$.

$$x\sqrt{2}=6$$
$$x=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

Esim. 8 Ratkaise yhtälö $\frac{\sqrt{2}}{x}=\frac{1-2\sqrt{2}}{x+1}$

Kertomalla ristiin saadaan heti nimittäjät pois:

$$\sqrt{2}(x+1)=x(1-2\sqrt{2})$$
$$x\sqrt{2}+\sqrt{2}=x-2x\sqrt{2}$$
$$x\sqrt{2}-x+2x\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$
$$3x\sqrt{2}-x=-\sqrt{2}$$
$$x(3\sqrt{2}-1)=-\sqrt{2}$$
$$x=\frac{-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}}$$

Tästä olisi vielä poistettava juuri nimittäjästä. Jätetäänkö mietinnän alle, miksi saatua juuren lauseketta lavennetaan (vrt. esim. 1.36 b) juuri (1 + 3$\sqrt{2}$):lla ?

$$x=\frac{\sqrt{2}(1+3\sqrt{2})}{(1-3\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}+3(\sqrt{2})^2}{1-(3\sqrt{2})^2}$$
$$x=\frac{\sqrt{2}+6}{1-18}=\frac{\sqrt{2}+6}{-17}$$