2.3 Käyrän tangentti ja normaali

Funktion f kuvaajan pisteeseen $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ asetetun tangentin kulmakerroin $k_t = f'(x_0)$. Siis sivuamispisteessä laskettu derivaatan arvo antaa suoraan **tähän pisteeseen** asetetun tangentin kulmakertoimen. Näin saadaan

****
LAUSE 16

Funktion f kuvaajan pisteeseen $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ asetetun tangentin yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

****

Esim. 1 Määritä funktion P kuvaajan siihen pisteeseen, jonka x – koordinaatti on = – 1, asetetun tangentin yhtälö, kun $P(x) = 5x^3 - x^4$.

Sivuamispisteen y-koordinaatti $P(-1) = 5(-1)^3 - (-1)^4 = -6$.
$P'(x) = 15x^2 - 4x^3$ ja $P'(-1) = 15(-1)^2 - 4(-1)^3 = 15 + 4 = 19$.
Tangentin yhtälö siten

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$$
$$y + 6 = 19(x + 1) \Leftrightarrow y = 19x + 13$$

Sivuamispisteen kautta kulkevaa, tangenttia vastaan kohtisuorassa olevaa suoraa, sanotaan käyrän normaaliksi. Suorien kohtisuoruusehdoksi muistettaneen se, että kulmakertoimien tulee olla toistensa vastakkaismerkkisiä käänteislukuja, eli tangentin ja normaalin kulmakertoimien tulon $k_t k_n = -1$.

Kulmakertoimia koskevassa erikoistapauksessa suora ja sen normaali saattavat olla koordinaattiakseleiden suuntaiset. Erikoistapaus tämä on sen tähden, että y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa, koska 90 asteen kulmalla ei ole tangenttia.

****

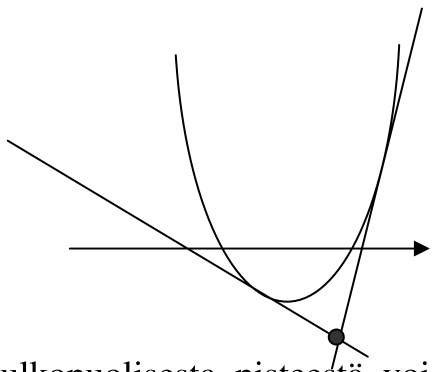
SEURAUSLAUSE 16.1

Funktion f kuvaajan pisteeseen $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ asetetun normaalin yhtälö on

$$y - f(x_0) = -\frac{x - x_0}{f'(x_0)}$$

edellyttäen, että $f'(x_0) \neq 0$. Mikäli sattuu olemaan $f'(x_0) = 0$, normaalin yhtälö on yksinkertaisesti $x = x_0$.

****



Esim. 2 Määritä pisteestä (1,–4) paraabelille

$$y = x^2 + 3x + 1$$

piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

On varsin ilmeistä, että paraabelin ulkopuolisesta pisteestä voidaan piirtää paraabelille kaksi tangenttia. Pahin virhe, mitä tässä tehtävässä voit tehdä, on se, että sijoitat lauseen 7.16 mukaiseen kaavaan $x_0 = 1$ ja $f(x_0) = -4$, sillä kaavassa alaindeksein varustellun pisteen täytyy onn sivuamispiste. Tässä tämä piste ei kuulu paraabelille ensinkään.

Valitaan tuntemattomaksi sivuamispisteen x – koordinaatti x_0 , ja kirjoitetaan tangentin yhtälöksi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - x_0^2 - 3x_0 - 1 = (2x_0 + 3)(x - x_0)$$

Pisteen (1,–4) koordinaatit **toteuttavat tangentin yhtälön**, koska tangentti käy tämän pisteen kautta. Sijoitetaan siis **x = 1** ja **y = –4** ja pyritään ratkaisemaan x_0.

$$-4-x_0^2-3x_0-1=(2x_0+3)(1-x_0)$$
$$-5-x_0^2-3x_0=2x_0-2x_0^2+3-3x_0$$
$$x_0^2-2x_0-8=0$$
$$x_0=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1(-8)}}{2}\Leftrightarrow x_0=4 \text{ tai } x_0=-2$$

Sivuamispisteiden y – koordinaatit:

$$y(4)=4^2+3\cdot 4+1=29$$
$$y(-2)=(-2)^2+3\cdot(-2)+1=-1$$

derivaattain arvot vastaavissa pisteissä

$$y'(4)=2\cdot 4+3=11$$
$$y'(-2)=2\cdot(-2)+3=-1$$

ja tangenttien yhtälöt siten

$y - 29 = 11(x - 4)$ eli $y = 11x - 15$
$y + 1 = - 1(x + 2)$ eli $y = - x - 3$