1 VEKTORI

Matematiikassa ja erilaisissa sovellutuksissa, erikoisesti fysiikassa, käytetyistä suureista osa on sellaisia, että niihin liittyy pelkkä suuruus, osa taas sellaisia, että niihin liittyy suuruuden lisäksi suunta. Edellisiä sanotaan **skalaarisuureiksi,** jälkimmäisiä **vektorisuureiksi.**

Esim. 1. Laiturin pituus on 63 m.
Kolmion pinta-ala on 12½ cm^2.
Huoneen lämpötila on 19 ^oC.
Auto käytti 35 min matkaan Jämsänkoskelta Korpilahdelle.
Nostettaessa matkalaukku lattialta hyllylle tehdään 210 J työ.
Auton vauhti on 95 km/h.

Kaikki luetellut ovat esimerkkejä skalaarisuureiden käytöstä. Näihin suureisiin ei liity suuntaa, vaikka joku saattaa ajatella, että esimerkiksi aika kulkee vain eteenpäin ja johan siinä on mukana suuntakin.

Esim. 2 Tuulen nopeus on 12 m/s idästä länteen.
Partio siirtyi paikasta A 16 km pohjoiseen.
Nosturi vaikutti betonielementtiin 66 kN voimalla suoraan ylöspäin.
Sähkökentän voimakkuus on 22 kV/m z-akselin suuntaan.

Kaikki nyt luetellut ovat esimerkkejä vektorisuureiden käytöstä. Kaikkiin kuvattuihin ilmiöihin tai tapahtumiin liittyi jonkin suureen suuruuden (= lukuarvon ja yksikön) ilmoittamisen lisäksi kuvaus suunnasta.

Kaikilla lienee käsitys geometrisesta elementistä, jota kutsutaan **suora**ksi. Sehän on suunnaltaan muuttumaton, äärettömän ohut viiva, joka tarkastelukohdasta jatkuu rajattomasti kahteen toisilleen vastakkaiseen suuntaan.

Jos suora sahataan poikki, saadaan kaksi **puolisuora**a. Puoliskot saattavat olla yhtä pitkät, katkaistiinpa suora mistä kohdasta tahansa. Jos joku epäilee, käykööt katsomassa siellä toisessa päässä, ovatko ne yhtä etäällä katkaisukohdasta vaiko eivät.

Jos suora sahataan kahdesta eri kohdasta poikki ja sahauskohtien välinen osa otetaan talteen, saadaan **jana**.

Jos janan päätepisteistä päästään sopimaan niin, että yksimielisesti sanotaan sen toista päätepistettä **alkupiste**eksi ja toista **loppupiste**eksi, saadaan **suuntajana**, josta usein käytetään nimitystä **vektori**.

Koulumatematiikassa, vallankaan alkeistasolla, ei näiden kahden nimityksen, suuntajana tai vektori, välisellä käytöllä ole kovin suurta väliä, sillä/vaikka kyseessä on aika syvällinen matemaattinen käsite-eroavaisuus. Tätä valaiskoot seuraava käytännön

Esim. 3 Henkilöauton merkki = VW ja malli = Passat Variant 1995. Tällaisia autoja on Suomessa useita kymmeniä, ehkäpä satoja. Tarkkanenäinen, autoista kiinnostunut erottaa tämän automallin muista samankin merkin malleista.

Voidaan siis puhua yleisesti VW Passat Variantista, vm. 1995 (= vektori), mutta kaikki nämä autot voidaan erottaa toisistaan, eli yksilöidä ainakin valmistenumeron perusteella. Jos puhutaan juuri siitä yksilöstä, jolla Raimo Viertola joskus ajelee, niin on keskustelun kohde määrätty täysin yksikäsitteisesti (= suuntajana).

Suuntajana on siis vektorin edustaja, kuten valmistenumeron perusteella yksilöity auto on tietyn automallin edustaja. Saman automallin yksilöityjä edustajia maailmassa voi olla vain rajallinen määrä (T-mallin Fordeja aikoinaan myytiin 15 007 033 kpl), mutta saman vektorin edustajien (yhtä pitkien ja samansuuntaisten suuntajanojen) määrää ei ole mitenkään rajoitettu.

Olkoot A ja B avaruuden (aluksi yleensä xy-tason) kaksi eri pistettä. Nämä määräävät janan. Jos sovitaan, että tämän janan alkupiste on A ja loppupiste B, saadaan suuntajana $\overrightarrow{AB}$.

****

MÄÄRITELMÄ 1

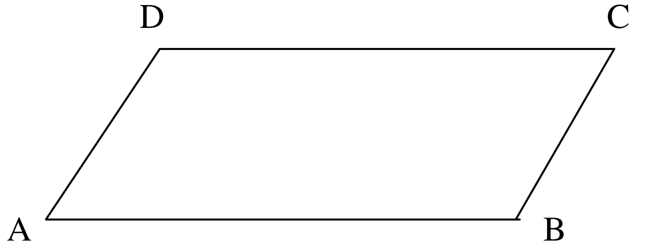
Vektori on sellainen ekvivalenssiluokka, jonka edustajat ovat kaikki yhtä pitkiä ja samansuuntaisia suuntajanoja riippumatta siitä, mistä avaruuden pisteestä ne alkavat.

****

Vektoria voidaan siis pitää suunnan (kuvataan nuolella) ja pituuden (kuvataan luvulla) yhdistelmänä. (Mutta mikä tarkoitus on sanalla ekvivalenssiluokka?)

Vektoreita merkitään eri kielisessä kirjallisuudessa eri tavoin, ehkä painoteknisistäkin syistä. Jos halutaan ilmaista, mistä pisteestä sen edustaja alkaa ja mihin se päättyy, käytetään merkintää $\overrightarrow{AB}$. Jos vektorin sijainti koordinaatistossa ei ole tärkeä, sitä usein merkitään pienellä kirjaimella, jonka päällä on viiva, esim. $\bar{a}, \bar{b}$, jne. Näkee myös lihavoitua kirjainta, tavallisimmin isoa **A, B,** jne. merkitsemässä vektoria.

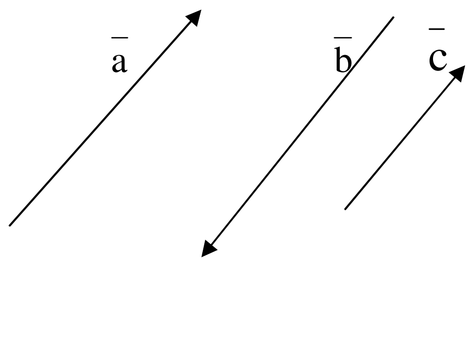
Esim. 4 Suunnikas on nelikulmio, jonka molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaiset.



Suuntajanat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{DC}$ keskenään ovat saman vektorin $\bar{a}$ edustajia. Toisaalta ovat suuntajanat $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BC}$ keskenään saman vektorin $\bar{b}$ edustajia.

Voidaan kirjoittaa $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ja toisaalta vaikkapa $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

Kun puhutaan tason kahdesta suorasta, on kaksi mahdollisuutta tai oikeastaan kolme. Suorat voivat olla yhdensuuntaiset, jolloin niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä taikka sitten ne yhtyvät täydellisesti eli sijaitsevat päällekkäin. Kolmas mahdollisuus on se, että suorat leikkaavat toisensa, ja silloin niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Kun puhutaan tason vektoreista, ne voivat olla sellaisessa asennossa, että niiden määräämät suorat leikkaavat toisensa täsmälleen yhdessä pisteessä. Vektorit ovat silloin **erisuuntaiset.** Jos taas vektoreiden määräämät suorat ovat yhdensuuntaiset, ehkä yhtyvätkin, vektorit ovat **yhdensuuntaiset.** Vektoreilla yhdensuuntaisuus kuitenkin jakaantuu vielä kahteen sellaiseen alakäsitteeseen, joita ei tason suorille pysty määrittelemään. Yhdensuuntaiset vektorit voivat nimittäin olla joko **samansuuntaiset** tai **vastakkaissuuntaiset**.



Viereisen kuvan kolme vektoria ovat sellaiset, että niiden määräämät suorat ovat yhdensuuntaiset. Tällöin kaikki kolme vektoria ovat myös yhdensuuntaiset: $\bar{a} \parallel \bar{b} \parallel \bar{c}$

Yhdensuuntaiset vektorit voivat siis olla joko samansuuntaiset:

$$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$$

taikka vastakkaissuuntaiset:

$$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}.$$

Joskus saattaa käydä niin, ettei taskusta löydy yhtään rahaa. Ei lompakostakaan. Tuolla onnettomalla on silloin 0 €. Sattuu käymään niinkin, että suuntajanan (vektorin) alkupiste = sen loppupiste. Tällöin on kyseessä esimerkiksi suuntajana $\overrightarrow{AA}$, joka on nollavektorin $\bar{0}$ edustaja. Tämän vektorin pituus on siis (reaaliluku 0) ja tämä on ainoa vektori, jolla ei ole suuntaa. Sen geometrisena vastineena on yksi ainoa tason piste.

Vektorin $\bar{a}$ pituus voi joskus olla yksi, $|\bar{a}| = 1$. Tästä käy esimerkkinä vaikkapa sellainen suuntajana, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen (1,0). Tällaista vektoria sanotaan **yksikkövektoriksi**. Erikoisesti vektorin $\bar{a}$ suuntaista yksikkövektoria merkitään $\hat{a}$ (a-hattu), ja tälle

$$\hat{a} \uparrow\uparrow \bar{a} \quad \text{ja} \quad |\hat{a}| = 1.$$

Jos vektorilla $\bar{v}$ on ominaisuudet $\bar{v} \uparrow\downarrow \bar{a}$ ja $|\bar{v}| = |\bar{a}|$, niin vektoria $\bar{v}$ sanotaan vektorin $\bar{a}$ vastavektoriksi, jota merkitään $-\bar{a}$. Suuntajanamerkinnöin esimerkiksi: $\overrightarrow{CM}$ ja $\overrightarrow{MC}$ ovat toistensa vastavektoreita.

****

MÄÄRITELMÄ 2

Kaksi vektoria ovat samat täsmälleen silloin, kun niillä on sama pituus ja sama suunta. ts.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow |\bar{a}| = |\bar{b}| \text{ ja } \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}.$$

****