2 Vektoreiden summa ja erotus

Kun kokonaisluvuilla suoritetaan neljää peruslaskutoimitusta, harvoin kai tullaan ajatelleeksi, että kahden kokonaisluvun summa, erotus ja tulo ovat aina kokonaislukuja, mutta kahden kokonaisluvun osamäärä ei välttämättä ole kokonaisluku. Kun määritellään kahden vektorin summa ja erotus, nämä ovat myös vektoreita. Laskettaessa siis kaksi "nuolta" yhteen, summa (ja erotus) on myös "nuoli". Myöhemmin määritellään vektoreille kaksi erilaista kertolaskua. Toisen tulos on luku (skalaaritulo eli pistetulo) ja toisen "nuoli" (vektoritulo eli ristitulo). Kahden vektorin välisestä jakolaskusta näiden rivien kirjoittajalla ei toistaiseksi ole tietoa.

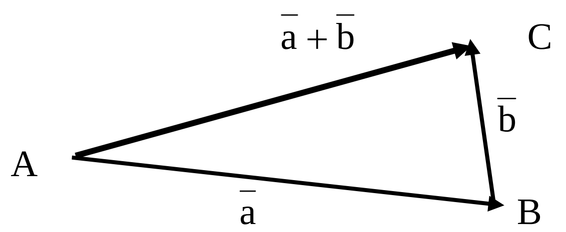
****

MÄÄRITELMÄ 3

Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi mielivaltaista vektoria. Siirretään vektori $\overline{b}$ suuntansa säilyttäen niin, että sen alkupiste = vektorin $\overline{a}$ loppupiste. Tällöin summa $\overline{a}+\overline{b}$ on vektori, joka alkaa $\overline{a}$:n alkupisteestä ja päättyy $\overline{b}$:n loppupisteeseen.

Jos valitaan vektorille $\overline{a}$ pisteestä A alkava edustaja $\overrightarrow{AB}$ ja $\overline{b}$:lle pisteestä B alkava edustaja $\overrightarrow{BC}$, niin

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



****

Kuvan vektori $\overrightarrow{AC}$ tai sen kanssa identtinen vektori on siis summan $\overline{a}+\overline{b}$ edustaja. Korostettakoon, että mille tahansa vektorille voidaan valita mistä pisteestä tahansa alkava edustaja. Tämä merkitsee sitä, että vektori voidaan siirtää paikasta toiseen, itse asiassa mihin paikkaan tahansa, jos sen suunta pysyy muuttumattomana eikä sen pituuteenkaan kajota. Erikoisesti sanotaan kahden vektorin olevan ***yhteenlaskuasennossa,*** jos edellisen loppupiste = jälkimmäisen alkupiste.

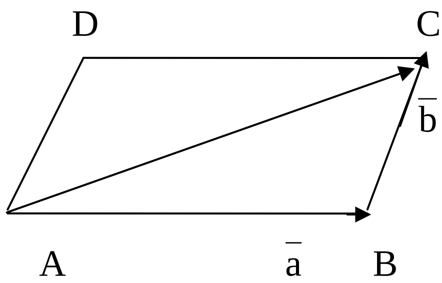
****

Lause 1 Vektoreiden summa on sekä vaihdannainen että liitännäinen ts.

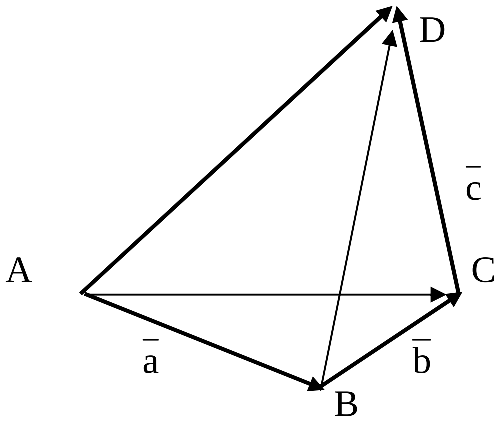
$$1^{o} \quad \overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$$

$$2^{o} \quad \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$$

Tod.: 1^{o} Oheisen suunnikkaan lävistäjä voidaan esittää kahdella tavalla sen sivuvektoreiden summana. Kiertämällä oikealta alakautta saadaan summa $\overline{a}+\overline{b}$ ja kiertämällä vasemmalta yläkautta saadaan summa $\overline{b}+\overline{a}$. Koska kumpaakin summaa edustaa sama vektori = suunnikkaan lävistäjä, niin nämä summat ovat yhtä suuret eli vektoreiden summa on todellakin vaihdannainen.



2^{o} Viereisessä nelikulmiossa on valittu $\overrightarrow{AB}=\overline{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overline{b}$ ja $\overrightarrow{CD}=\overline{c}$. Koska $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ ja koska myös $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ ja kun näissä yhtälöissä vasemmat puolet ovat samat, niin myös yhtälöiden oikeat puolet ovat samat. Siis



$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} \text{ eli}$$

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$$

****

Sulkumerkit käyvät tarpeettomiksi, jos sovitaan, että $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$. Sulkeita tietenkin voi käyttää, mikäli haluaa laskujärjestystä erityisesti korostaa. Useamman kuin kahden vektorin summa voidaan muodostaa niin, että asetetaan vektorit peräkkäin niin, että seuraava yhteenlaskettava alkaa aina edellisen loppupisteestä.

Summavektorin edustaja alkaa silloin ensimmäisen yhteenlaskettavan alkupisteestä ja päättyy viimeisen loppupisteeseen. (Olisipa luvuillakin yhteenlasku yhtä helppoa!) Jos yhteenlaskettavat vektorit muodostavat umpinaisen murtoviivan, summan arvo on nollavektori. Viiva saa olla itseään leikkaavakin, kunhan vain viimeinen yhteenlaskettava päättyy siihen, mistä ensimmäinen alkaa.

Menetelmä voi olla kätevä fysiikan probleemain ratkaisussa. Kappaleelle tasapainolle välttämätön ehtohan on se, että kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on nolla. Elleivät kappaleeseen vaikuttavat voimavektorit yhteenlaskuasentoon järjestettyinä muodosta suljettua murtoviivaa $(\sum \overline{F} = \overline{0})$, kappale ei varmasti ole tasapainossa. Suljetun vektorimonikulmion käsittelyssä sinilause ja kosinilause saattavat olla kovaa tavaraa.

On syytä pitää mielessä, että useankaan vektorin summan käsittelyssä ei tarvitse rajoittua samaan tasoon. Tähän asiaan palataan myöhemmin.

****

MÄÄRITELMÄ 4

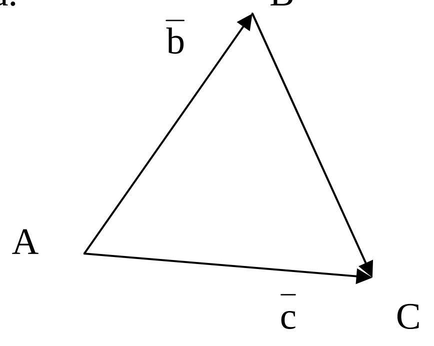
Kahden vektorin $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ erotuksella $\overline{a} - \overline{b}$ tarkoitetaan vektoria $\overline{x}$, joka toteuttaa ekvivalenssin

$$\overline{x} = \overline{a} - \overline{b} \Leftrightarrow \overline{b} + \overline{x} = \overline{a}$$

ts. kahden vektorin erotus on vektori, joka lisättynä vähentäjään antaa tulokseksi vähennettävän.

****

Mitä sivulla 5 todettiin vastavektorista, paljastanee osaltaan, kuinka erotusvektori käytännössä voidaan muodostaa. Saattaa olla käytännöllisempää asettaa vektorit alkamaan samasta pisteestä. Tällöin olisi oikeutettua puhua vektoreiden olevan vähennyslaskuasennossa. Valitaan viereisen kuvan merkinnöin $\overrightarrow{AB} = \overline{b}$ ja $\overrightarrow{AC} = \overline{c}$. Tällöin on voimassa vektoriyhtälö $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, josta vektoreiden summaamista koskevien tosiasioiden nojalla saadaan $\overline{x} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, mistä voidaan lukea



sääntö: kahden vektorin erotus voidaan muodostaa asettamalla vektorit alkamaan samasta pisteestä, jolloin erotusvektori $\overline{x} = \overline{c} - \overline{b}$ ***alkaa vähentäjän loppupisteestä ja päättyy vähennettävän loppupisteeseen.*** Onhan ilman muuta

$$\overline{b} + (\overline{c} - \overline{b}) = \overline{b} + \overline{c} - \overline{b} = \overline{b} - \overline{b} + \overline{c} = \overline{0} + \overline{c} = \overline{c} \quad \text{eli}$$

vähentäjä + erotus = vähennettävä.

Kannattaa todellakin katsella edellisen sivun kuvaa parinakin iltana ihan kynän ja paperin kanssa ja todeta, että erotus $\overline{c} - \overline{b}$ on sama kuin vektorin $\overline{c}$ ja vektorin $\overline{b}$ vastavektorin $-\overline{b}$ summa

$$\overline{c} - \overline{b} = \overline{c} + (-\overline{b})$$

Esim. 1 Viereisen kuvan *mielivaltaisesta* nelikulmiosta esimerkiksi

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$