3 Vektorin kertominen reaaliluvulla

Summalla $\bar{a}+\bar{a}+\bar{a}$ tarkoitetaan lausekkeessa esiintyvän vektorin $\bar{a}$ kanssa samansuuntaista, mutta pituudeltaan tähän nähden kolminkertaista vektoria. Tätä summaa on tarkoituksenmukaista merkitä polynomilaskennasta saatavan mallin mukaisesti $\bar{a}+\bar{a}+\bar{a} = 3\bar{a}$ ja tätä tuloa voidaan pitää reaaliluvun 3 ja vektorin $\bar{a}$ tulona. Vastaavasti vektorilla $-2\bar{a}$ tarkoitetaan summaa $(-\bar{a})+(-\bar{a})$, mikä puolestaan on vektorin $\bar{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen, mutta pituudeltaan tähän verrattuna kaksinkertainen vektori.

****
MÄÄRITELMÄ 5

Reaaliluvun r ja vektorin $\bar{a}$ tulo on vektori, jolle

1^{o} $|r\bar{a}| = |r| \cdot |\bar{a}|$

2^{o} $r\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$, jos $r > 0$

$r\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}$, jos $r < 0$

$r\bar{a} = \bar{0}$, jos $r = 0$

****

Näin määriteltyä tuloa koskee seuraava

****

Lause 2 Olkoot r ja s mielivaltaisia reaalilukuja sekä $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ mielivaltaisia vektoreita. Tällöin

1^{o} $r(s\bar{a}) = (rs)\bar{a} = s(r\bar{a})$

2^{o} $(r+s)\bar{a} = r\bar{a} + s\bar{a}$

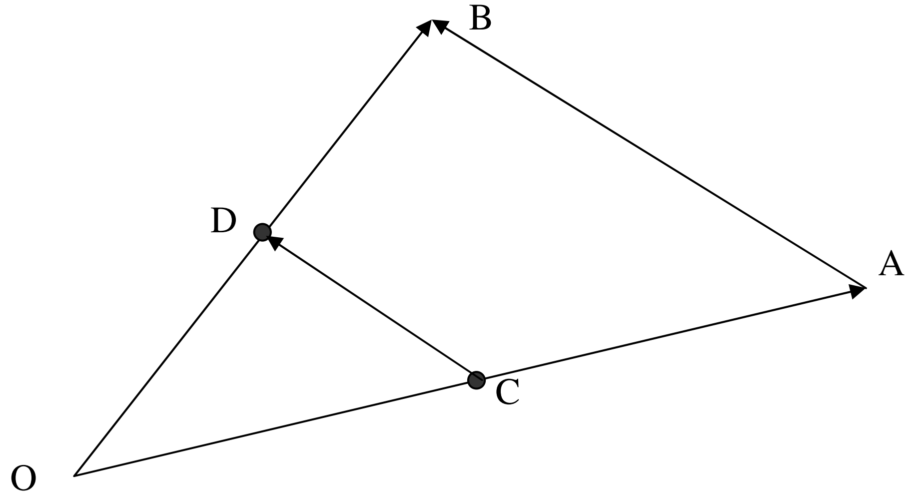
3^{o} $r(\bar{a}+\bar{b}) = r\bar{a} + r\bar{b}$

Tod.: sivuutetaan, vaikka ei ole kovin vaikea.

****

Esitetyn lauseen oleellinen sisältö on se, että vektoreiden lineaarisia (=ensiasteisia) lausekkeita ja yhtälöitä voidaan käsitellä aivan kuin ensiasteen polynomeja tai ensiasteen yhtälöitä.

Esim. 1 Kuvan kolmiossa OAB on $\overrightarrow{OA} = \overline{a}$ ja $\overrightarrow{OB} = \overline{b}$. Lisäksi C on sivun OA keskipiste ja D sivun OB keskipiste. Lausu $\overrightarrow{CD}$ vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.



Koska C on sivun OA keskipiste, niin OC = CA, tai yhtä hyvin voidaan kirjoittaa $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$ ja $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = ½\overline{a}$. Vastaavasti $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = ½\overline{b}$

Lisäksi on voimassa vektoriyhtälö $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -½\overline{a} + ½\overline{b} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2}$.

Tähän mennessä kirjoitetussa tekstissä on tehty kaikki se, mitä tehtävänannossa pyydettiin. Voidaan mennä hitusen pitemmällekin. Kolmiosta OAB saadaan nimittäin yhtälö $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} - \overline{a}$. Kun tämä yhtälö yhdistetään yhtälöön $\overrightarrow{CD} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2}$, niin määritelmän 5.5 tuella voitaisiin väittää, että $\overrightarrow{CD} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$. Tällainen vektorilausekkeiden muokkaus on tuottanut tulokseksi geometrisen tosiasian:

****

Mielivaltaisessa kolmiossa kahden sivun keskipisteiden yhdistysjana on kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet tästä.

****

Esim. 2 Ratkaise $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ yhtälöparista $\begin{cases} 2\overline{u} - \overline{v} = 7\overline{a} \\ \overline{u} + 3\overline{v} = 7\overline{b} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\overline{u} - \overline{v} = 7\overline{a} \\ \overline{u} + 3\overline{v} = 7\overline{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\overline{u} - 3\overline{v} = 21\overline{a} \\ \overline{u} + 3\overline{v} = 7\overline{b} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$7\overline{u} = 21\overline{a} + 7\overline{b}$$

josta saadaan puolittain jakamalla luvulla 7 : $\overline{u} = 3\overline{a} + \overline{b}$

Sijoitetaanpas tämä vaikka alempaan yhtälöön, niin saadaan

$$3\overline{a} + \overline{b} + 3\overline{v} = 7\overline{b} \Leftrightarrow 3\overline{v} = -3\overline{a} - \overline{b} + 7\overline{b} \Leftrightarrow 3\overline{v} = -3\overline{a} + 6\overline{b} \Leftrightarrow \overline{v} = -\overline{a} + 2\overline{b}.$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} \overline{u} = 3\overline{a} + \overline{b} \\ \overline{v} = -\overline{a} + 2\overline{b} \end{cases}$$

Aiemmin on jo määritelty yksikkövektori ja todettu, että vektorin $\overline{a}$ suuntaista yksikkövektoria merkitään $\hat{a}$, mutta käytetään myös merkintää $\overline{a}^{o}$. Tässä kurssissa käytetään hattu-merkintää. Tämä vektori on siis pituudeltaan yksi (koordinaatiston) pituusyksikkö, esimerkiksi matka origosta pisteeseen (0,1) ja se on samansuuntainen kuin $\overline{a}$. On ilmeistä, että jos vektorin kertoo ykköstä suuremmalla luvulla, saadaan alkuperäistä pitempi, mutta alkuperäisen kanssa samansuuntainen vektori. Jos kertoja taas toteuttaa ehdon $0 < r < 1$, saadaan kerrottavaa lyhempi vektori, jonka suunta on sama kuin kerrottavan. Vektoria $\overline{a}$ on kaiketi kerrottava jollakin luvulla x, joka pyritään selvittämään. ON siis voimassa vektoriyhtälö $x\overline{a} = \hat{a}$.

Yhtälön kummallakin puolen on nyt vektori, jonka pituus on yksi, joten on voimassa $|x\bar{a}| = 1 \Leftrightarrow x|\bar{a}| = 1$ (koska $x > 0$) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{|\bar{a}|}$ elikkä

$$\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$

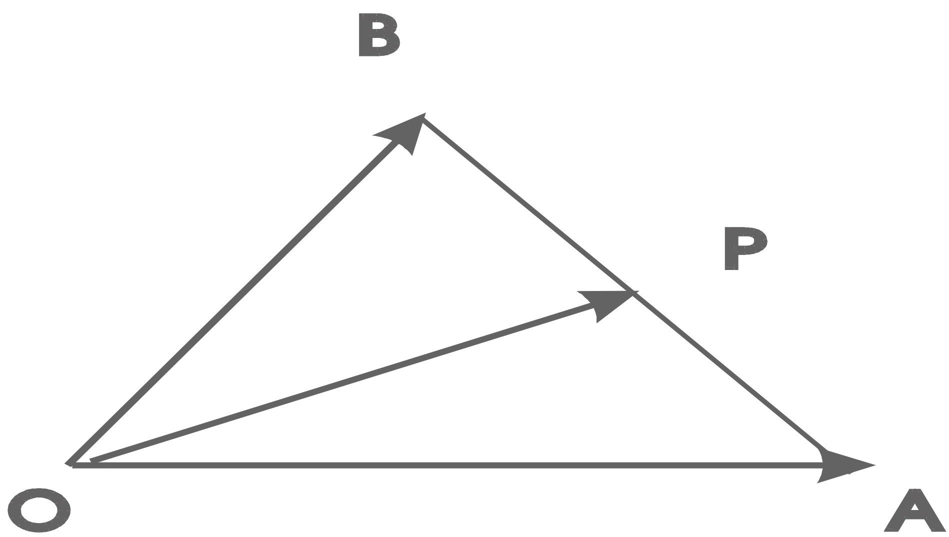
eli sanallisesti ilmaisten: **vektorin suuntainen yksikkövektori muodostetaan jakamalla vektori pituudellaan.**

Vektorin ja reaaliluvun tuloa koskevan määritelmän nojalla on ilmeistä, että kaksi vektoria $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun on olemassa reaaliluku t siten, että $\bar{a} = t\bar{b}$.

Esim. 3 Jossakin laskutehtävässä päädytään vektoriyhtälöön $\overrightarrow{AB} = -3½\overrightarrow{CD}$. Saadusta yhtälöstä voidaan heti päätellä ensiksikin se, että $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ ja toisekseen, että yhtälön vasemmalla puolella oleva suuntajana on 3½ kertaa niin pitkä, kuin oikealla puolella oleva.

Esimerkissä 5.6 saatiin kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdistysjanaa koskeva tulos. Vektoreita käytettäessä tulevat molemmat vaaditut näytöt hankituksi yhdessä suhteellisen lyhyessä prosessissa. Muunlainen geometrinen todistaminen vaatii yhdensuuntaisuudelle oman näyttönsä ja pituudelle omansa. Katso vaikka geometrian kurssista. On tapauksia, että vektoreiden käyttöön pohjaava todistusmenetelmä taikka tuloksen johtaminen hakkaa kirkkaasti muut menetelmät.

Esim. 4 Olkoon $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ ja $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ ja olkoon vielä P janan AB keskipiste. Lausu $\overrightarrow{OP} = \bar{v}$ vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla.



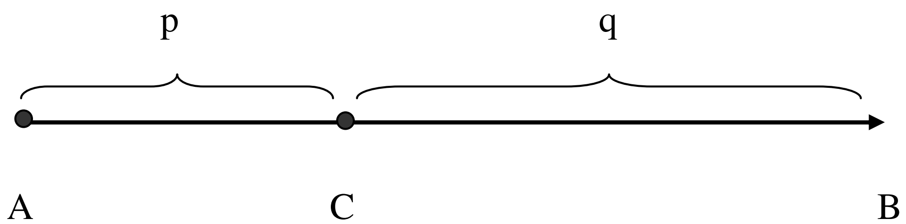
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \bar{a} + \tfrac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a}) = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}.$$

Tehtävän voi ratkaista myös seuraavasti: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \bar{v} - \bar{a} = \bar{b} - \bar{v} \Leftrightarrow$

$2\bar{v} = \bar{a} + \bar{b} \Leftrightarrow \bar{v} = \dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$.

Tarkastellaan tämän jälkeen janan jakamista kahden luvun suhteessa. Olkoon suuntajanalla $\overrightarrow{AB}$ piste C siten, että AC:CB = p:q. Miten voidaan $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ lausua $\overrightarrow{AB}$:n, p:n ja q:n avulla?

Jos jakosuhde olisi esimerkiksi 3:5, eikö annettu jana tulisi silloin jakaa kahdeksaan yhtäsuureen osaan, ottaa ensimmäiseen jako-osaan näistä kolme ja toiseen viisi, joten yleistäen

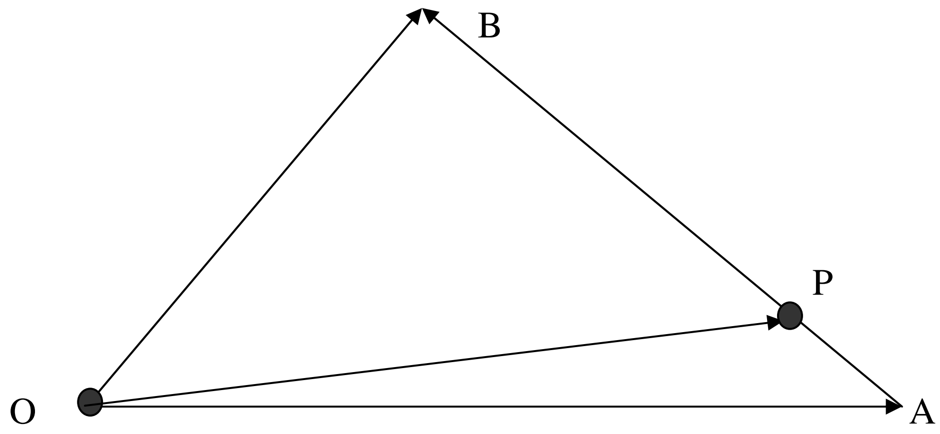


$$\overrightarrow{AC} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AB} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{CB} = \frac{q}{p+q}\overrightarrow{AB}.$$

Jos tarkistetaan ja lasketaan jako-osat yhteen, saadaan

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\left(\frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{p+q}{p+q}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.$$

Esim. 5 Olkoon annettu vektorit edustajineen $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$. Piste P jakaa suuntajanan $\overrightarrow{AB}$ pisteestä A lähtien 2:7. Lausuttava $\overrightarrow{OP}$ vekto-reiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla.



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\bar{b}-\bar{a}\text{ ja }\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{9}(\bar{b}-\bar{a}).$$

Toisaalta sitten on $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\bar{a}+\frac{2}{9}(\bar{b}-\bar{a})=\frac{7}{9}\bar{a}+\frac{2}{9}\bar{b}=\frac{7\bar{a}+2\bar{b}}{9}$

Tulos on yleistettävissä mille tahansa jakosuhteelle, joten voidaan kirjoittaa

****

Lause 3 Olkoon $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$. Jakakoon piste P janan AB suhteessa p:q luettuna pisteestä A lähtien. Tällöin suuntajana $\overrightarrow{OP}$ voidaan lausua muodossa

$$\overrightarrow{OP}=\frac{q\bar{a}+p\bar{b}}{p+q}$$

Tod.: Täysin esimerkin 5.10 mukaisesti. Luvun 2 tilalle sijoitetaan vain p ja luvun 7 tilalle q.

****

Huomaa, että voit käyttää tätä tulosta tarvitessasi aivan suoraan, jos satut sen vain muistamaan. Kenties taulukostakin löytyy.

Esim. 6 Olkoon M kolmiossa ABC mediaanin (keskijanan) AD sellainen piste, että AM:MD = 2:1. Olkoot O mielivaltainen piste, (jonka ei tarvitse sijaita edes kolmion ABC määräämässä tasossa). Johda suuntajanalle $\overrightarrow{OM}$ esitys vektoreiden $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ avulla, kun näillä on edustajat $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ ja $\overrightarrow{OC} = \bar{c}$. Piirrä kuva vihkoosi!

Juuri esitellyn lauseen mukaan on

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{1 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \overrightarrow{OD}}{3}$ ja $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\bar{b} + \bar{c}}{2}$, josta $2 \cdot \overrightarrow{OD} = \bar{b} + \bar{c}$ ja kun tämä sijoitetaan $\overrightarrow{OM}$:n lausekkeeseen, niin saadaan

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3}$$

Koska $\overrightarrow{OM}$:n esitys ei muutu, kun $\bar{a}$ vaihdetaan vektoriksi $\bar{b}$, $\bar{b}$ vektoriksi $\bar{c}$ ja $\bar{c}$ vektoriksi $\bar{a}$, niin tuloksesta voidaan päätellä kolmion keskijanoja koskeva tulos:

Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa jokaisen keskijanan 1:2 niin, että sivun puolelle jää kolmas osa.

Todistetaan vektorien lineaarisiin yhtälöihin läheisesti liittyvä hyvin käyttökelpoinen lause, joka muutoinkin lähentää asialle vihkiytyviä henkilöitä matematiikan yleiseen rakenteeseen

****

Lause 4 Olkoot $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ kaksi nollasta eroavaa, keskenään erisuuntaista vektoria. Tällöin lineaarinen lauseke $r\bar{a} + s\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow r = s = 0.$

Tod.: Ekvivalenssinuoli $(\Leftrightarrow)$ väitteen keskellä tarkoittaa sitä, että jos vasen puoli on totta, se takaa oikean puolen totuuden myös ja toisaalta oikean puolen totuudellisuus takaa vasemmankin puolen totuuden.

Todistus jakaantuu tämän mukaisesti kahteen osaan:

1^0 Oletetaan, että oikea puoli on totta eli että r = s = 0. Tällöin
$r\bar{a}+s\bar{b}=0\bar{a}+0\bar{b}=\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}.$

2^0 Oletetaan, että vasen puoli on totta eli että $r\bar{a}+s\bar{b}=\bar{0}$. Todistetaan nyt **epäsuorasti**, että välttämättä myös r = s = 0. Tehdään **vastaoletus eli antiteesi**, että $r \neq 0$. Tällöin on $\bar{a}=-\frac{s}{r}\bar{b}$, mikä puolestaan merkitsee sitä, että **joko** $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset **tai** että $\bar{a}=\bar{0}$, mikäli sattuisi olemaan s = 0. Molemmat johtopäätökset johtavat **ristiriitaan** oletuksen kanssa, joten ei ainakaan r voi olla nollasta eroava.

Vastaavalla tavalla näytetään, että myös s on välttämättä = 0.

Siispä vastaoletukset $r \neq 0$ tai $s \neq 0$ ovat molemmat vääriä, joten välttämättä r = s = 0.

****

Todistettu lause sisältää sen, että mikäli $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ molemmat ovat ei-yhdensuuntaisia, nollasta eroavia vektoreita, niin ei koskaan eikä mistään löydy sellaista reaalilukua r, että olisi $r\bar{a}=\bar{b}$.

Esim. 7 Suunnikkaan ABCD sivulla DC on piste E siten, että DE:EC = 3:1. Lävistäjä BD ja jana AE leikkaavat jossakin suunnikkaan sisällä olevassa pisteessä P. Missä suhteessa piste P jakaa lävistäjän BD ja janan AE?

Valitaan tavanomaisesti $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\bar{b}$. Annettu janan DC jakautuminen pisteessä E kertoo, että $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}=\frac{3}{4}\bar{a}$. Vektorin ”lyhentäminen” sen suuntaa kuitenkaan muuttamatta merkitsee, että se on kerrottu jollakin positiivisella, ykköstä pienemmällä luvulla. Koska tehtävässä mainittu lävistäjä BD ja jana AE leikkaavat toisensa pisteessä P, niin suuntajanat $\overrightarrow{AP}$ ja $\overrightarrow{BP}$ ovat myös lyhennelmiä, edellinen janan AE ja jälkimmäinen lävistäjän BD. Jos tämä lyhentämiskerroin tiedettäisiin, oltaisiinkin jo lähellä päämäärää. Valitaan ko. kertoimet tuntemattomiksi ja kirjataan, että $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AE}$ ja $\overrightarrow{BP} = y\,\overrightarrow{BD}$.

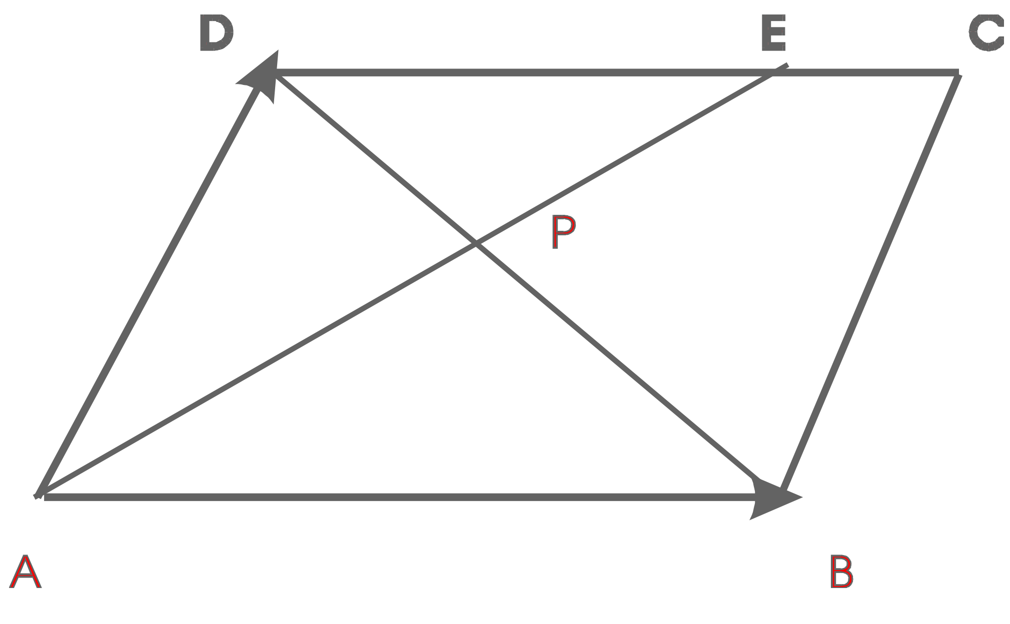
Kolmiosta ABP saadaan mukavasti vektoriyhtälö (*): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP}$.
Pyritään lausumaan kaikki viimeksi kirjoitetussa yhtälössä esiintyvät suuntajanat suunnikkaan sivuvektoreiden avulla:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overline{b} + \frac{3}{4}\overline{a}$ ja $\overrightarrow{BD} = \overline{b} - \overline{a}$ joten sijoittamalla (*):een saadaan

$$\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{BD} = x\,\overrightarrow{AE} \quad \text{eli} \quad \overline{a} + y(\overline{b} - \overline{a}) = x(\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{a}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{a} + y\overline{b} - y\overline{a} = x\overline{b} + \frac{3x}{4}\overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad (1 - y - \frac{3x}{4})\overline{a} + (y - x)\overline{b} = \overline{0}.$$

Nyt nojataan lauseeseen 5.4. Yläpuolelle saatu kehitelmä ilmentää jotakin seuraavan sivun alussa olevasta kuvasta. Kahden erisuuntaisen vektorin lineaarinen lauseke voi olla nolla vain silloin, kun kumpaisenkin vektorin kerroin on nolla.



$$\begin{cases} 1 - y - \dfrac{3x}{4} = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4y - 3x = 0 \\ y = x \end{cases}$$

Sijoitus y = x ylempään antaa

$4 - 4x - 3x = 0 \Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{7}$, ja sama on myös y. Kun nyt tiedetään tuntemattomien selvittyä, että $\overrightarrow{AP} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AE}$ ja $\overrightarrow{DP} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{DB}$, niin sekä lävistäjä BD että jana AE jakaantuvat "näkymättömällä tavalla" seitsemään osaan, ja "näkyvällä tavalla" kahteen osaan siten, että

$$AP : PE = BP : PD = 4 : 3.$$

Huom.! Vastaavalla menetelmällä on suhteellisen yksinkertaista näyttää esimerkiksi se, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.