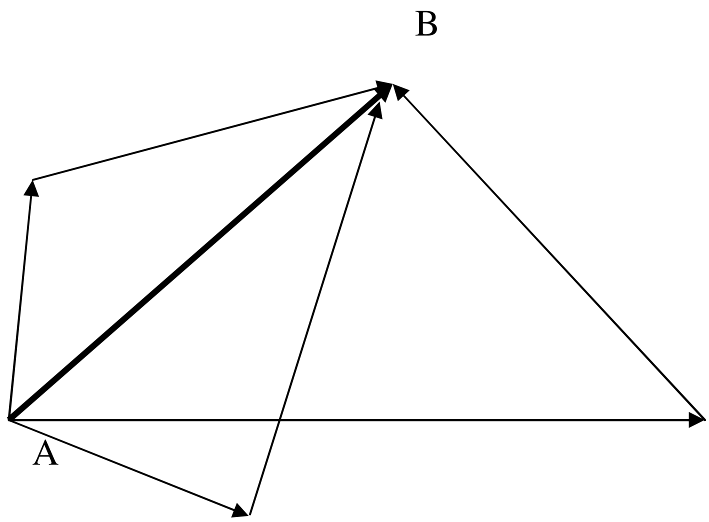
4 Vektorin komponenttiesitys

Edellä on laskettu vektoreita yhteen, vähennetty toisistaan ja kerrottu niitä reaaliluvuilla. Yhteenlaskulle käänteistä toimitusta sanotaan vektorin jakamiseksi komponentteihin. Suomeksi sanottuna tämä tarkoittaa sitä, että **annettu vektori esitetään kahden tai useamman vektorin summana.** Tämä on yleensä monimutkaisempaa kuin annetun luvun hajottaminen kahden luvun summaksi, sillä luvuilla ei ole sellaisia suuntavaatimuksia, joita vektoreilla tarkastelun kohteena olevassa asiassa varsin usein on.

Komponenttivektoreille siis asetetaan yleensä etukäteisehtoja. Tavallisin tapaus on jakaa vektori koordinaattiakseleiden suuntaisiin komponentteihin, eli esittää se (tasotapauksessa) kahden vektorin summana, joista toinen yhteenlaskettava on x-akselin ja toinen y-akselin suuntainen. Fysiikassa tämä on varsin yleistä. On myös mahdollista vaatia tiettyjen suorien (vektoreiden) suuntaisia komponentteja ja joskus toisen komponentin on oltava juuri tietyn mittainen jne.

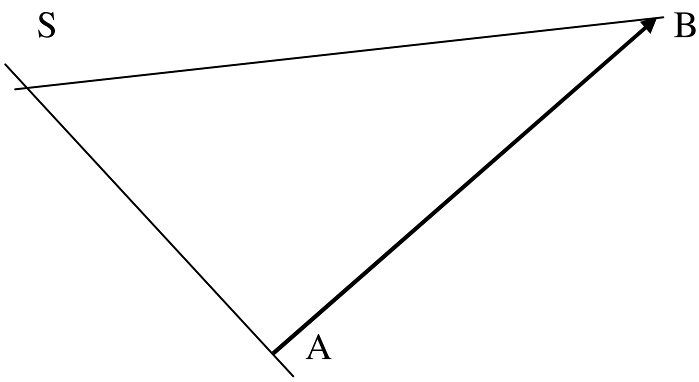
Alla oleva suuntajana $\overrightarrow{OA}$ (vektorin $\bar{a}$ edustajana) on jaettu komponentteihin kolmella eri tavalla. Ne eivät ilmeisesti ole ainoat mahdollisuudet, vaan erilaisten esitystapojen lukumäärä on ääretön.

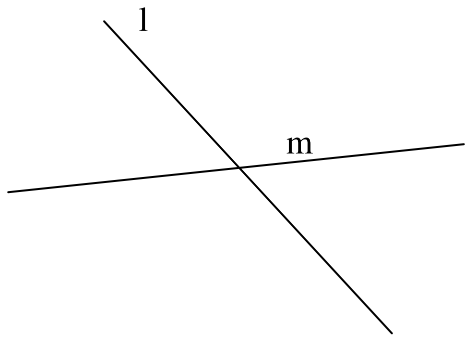


Esim. 1 Jaa suuntajana $\overrightarrow{AB}$ kahteen suorien l ja m suuntaiseen komponenttiin olettaen, että annetut suorat kuin myös mainitun suuntajanan määräämä suora ovat kaikki erisuuntaiset.

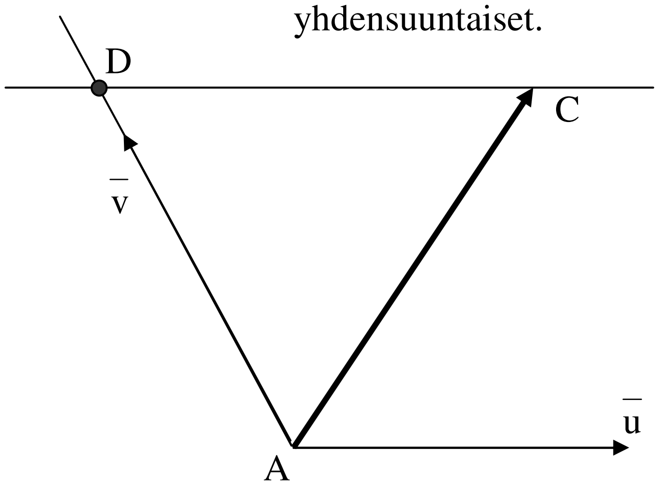
Ratkaisu on sellainen, että piirretään pisteen A kautta toisen, sanotaan m:n suuntainen suora ja pisteen B kautta toisen, siis l:n suuntainen suora. Nämä leikatkoot toisensa pisteessä S. Silloin $\overrightarrow{AS}$ on vaadituista komponenteista toinen ja $\overrightarrow{SB}$ on toinen, sillä on voimassa vektoriyhtälö

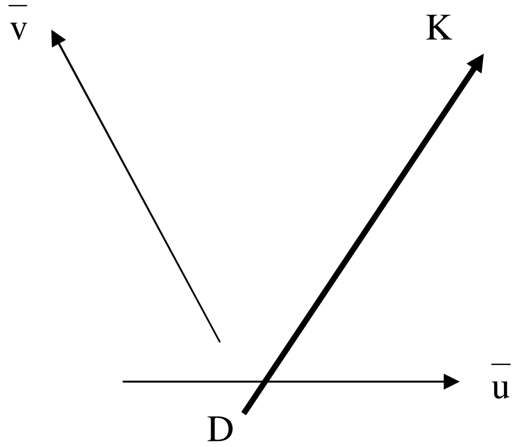
$$\underbrace{\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}}_{\text{komponentit}} = \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\text{resultantti}}$$





Esim. 2 Jaa vektori $\overrightarrow{DK}$ vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ suuntaisiin komponentteihin, kun mitkään annetuista annetut vektoreista eivät ole keskenään yhdensuuntaiset.





Suuntajanalle $\overrightarrow{DK}$ on valittu pisteestä A alkava edustaja $\overrightarrow{AC}$ ja myös vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ on siirretty alkamaan pisteestä A. Kuvio on täydennetty (vajaaksi) suunnikkaaksi, jossa on voimassa yhtälö $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Sen mukaan, mitä tiedetään vektorin kertomisesta reaaliluvulla ja sen mukaan miten piirros on suoritettu, tiedetään ilman muuta, että löytyvät sellaiset reaaliluvut e ja f, että $\overrightarrow{AD}=e\bar{v}$ ja $\overrightarrow{DC}=f\bar{u}$, joten $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AC}=e\bar{v}+f\bar{u}$

Näin on $\overrightarrow{DK}$ voitu lausua $\bar{u}$:n ja $\bar{v}$:n avulla eli on nyt jaettu $\bar{u}$:n ja $\bar{v}$:n suuntaisiin komponentteihin.

Tällaisessa tapauksessa sanotaan, että vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ muodostavat erään **kannan.** Kun nyt on voimassa yhtälö $e\bar{v}+f\bar{u}=\overrightarrow{DK}$, niin sanotaan, että

- reaaliluvut e ja f ovat suuntajanan (vektorin) $\overrightarrow{DK}$ s**kalaarikomponentit kannan** $(\bar{u},\bar{v})$ suhteen
- vektorit $e\bar{v}$ ja $\overline{f\,u}$ ovat $\overrightarrow{DK}$:n **vektorikomponentit**.

****

Lause 5 Kun kantavektorit on annettu, vektorin komponentteihin jako on yksikäsitteinen.

****

Edellähän todettiin, että vektori voidaan jakaa komponentteihin äärettömän monella eri tavalla. Lauseen 5 yksikäsitteisyys tarkoittaa sitä, että jos on annettu tasosta kaksi erisuuntaista, nollasta eroavaa vektoria, sanokaamme vaikka $\bar{u}$ ja $\bar{v}$, niin näiden määräämään tasoon kuuluva vektori $\bar{a}$ voidaan vain yhdellä tavalla esittää $\bar{u}$:n ja $\bar{v}$:n lineaarikombinaationa ts. näiden ensiasteisena lausekkeena muodossa

$$\bar{a}=r\bar{u}+s\bar{v}$$

Lauseen todistamiseksi tehdään jälleen **vastaoletus:** On olemassa sellaiset reaaliluvut r, s, k ja m siten, että vektori $\bar{a}$ onkin voitu jakaa komponentteihin kahdella eri tavalla:

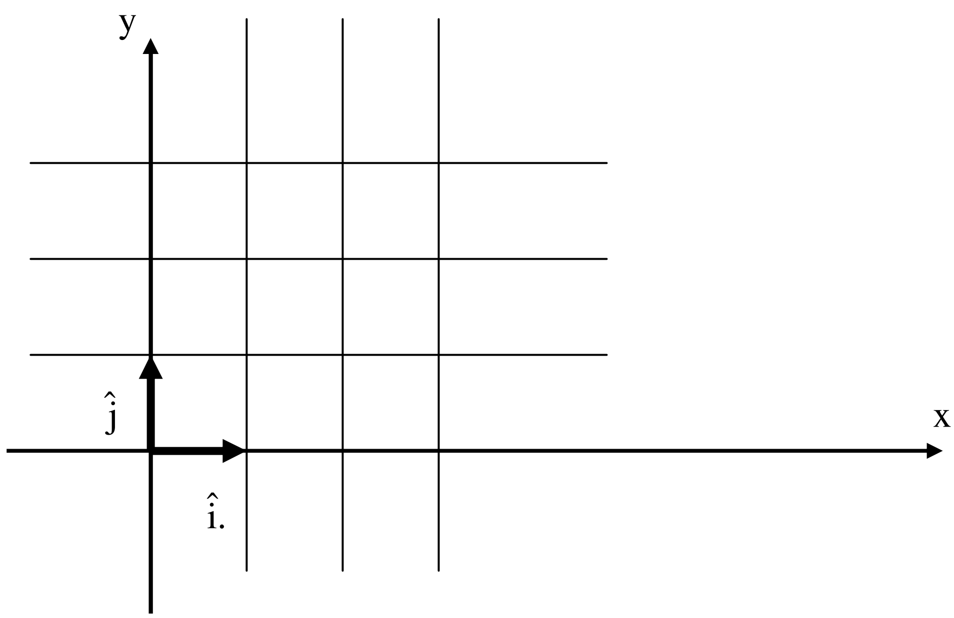
$$\begin{cases} \overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v} \\ \overline{a} = k\overline{u} + m\overline{v} \end{cases} \Leftrightarrow r\overline{u} + s\overline{v} = k\overline{u} + m\overline{v} \Leftrightarrow (r-k)\overline{u} + (s-m)\overline{v} = \overline{0}$$

Lauseen 4 perusteella tästä seuraa heti, että r = k ja s = m, mikä juuri merkitsee komponenttijaon yksikäsitteisyyttä.

ANKARA VAROITUS: Jos annetut vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, näiden lineaarinen lauseke tulee nollaksi lukemattomin tavoin, eikä ainoastaan lausekkeena $0\overline{a} + 0\overline{b} = \overline{0}$, joskin myös on ilmeistä, että kahden nollavektorin summa on nollavektori. Yhdensuuntaisten vektoreiden tapauksessa riittää löytää sellainen lukupari c ja d, että $c\overline{a}$ ja $d\overline{b}$ tulevat toistensa vastavektoreiksi. Nojautuessasi tehtäviä suorittaessasi lauseeseen 4 **kiinnitä erityistä huomiota siihen, että lauseen oletukset ovat täytetyt.**

Jaettaessa vektoria komponentteihin on yleisin tapa se, missä komponentit ja siis myös **kantavektorit** ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset. Tällöin kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (ortogonaalinen kanta) ja on harvinaista, että niiden pituus olisi jotakin muuta kuin 1 (ortonormitettu).

Sellaista vektoria, joka on x-akselin suuntainen ja pituudeltaan 1, merkitään symbolilla $\hat{i}$.Tämän vektorin edustaja voi siten olla origosta alkava, pisteeseen (1,0) päättyvä suuntajana. Vastaavasti merkitään y-akselin suuntaista yksikkövektoria = $\hat{j}$ ja vielä z-akselin suuntaista yksikkövektoria = $\hat{k}$.



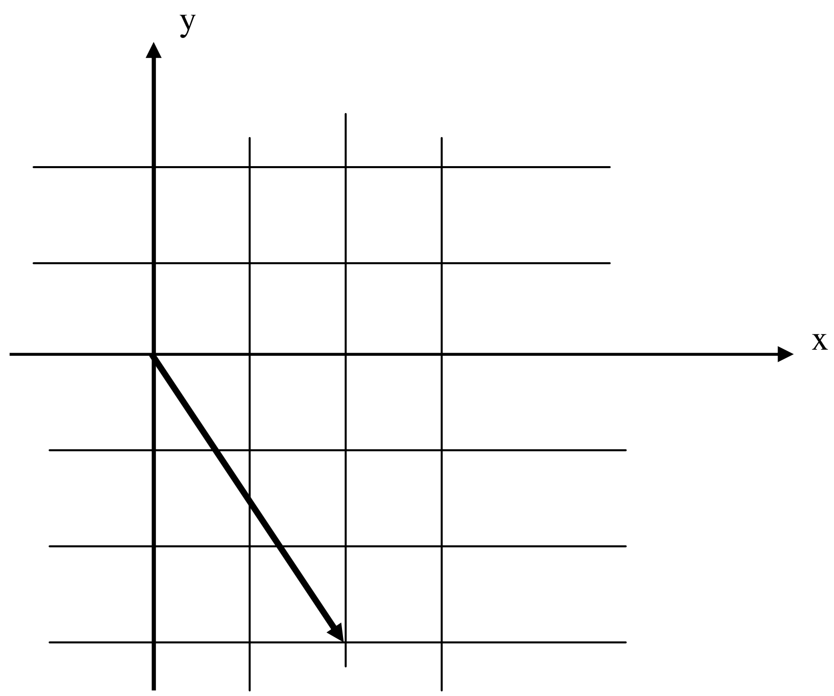
Mikä tahansa xy-tason (suuntaisen tason) vektori voidaan aina lausua **kannassa** $(\hat{i}, \hat{j})$ eli jakaa yksikäsitteisesti vektoreitten $\hat{i}$ ja $\hat{j}$ suuntaisiin komponentteihin muodossa

$$\bar{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}.$$

Reaaliluja a_x ja a_y sanotaan vektorin $\bar{a}$ **skalaari**komponenteiksi kannan $(\hat{i}, \hat{j})$ suhteen.

Esim. 3 Piirrä vektorille $\bar{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ origosta alkava edustaja.

Tämän vektorin (peruskoulumaisesti) piirtämiseksi lähdetään origosta, edetään pitkin positiivista x-akselia kahden $\bar{i}$:n verran eli kaksi pituusyksikköä ja tullaan pisteeseen (2,0), josta otetaan suunta kohti etelää. Edetään sitten kohti lämpimiä maita kolme pituusyksikköä eli asetellaan peräkkäin kolme $\bar{j}$:n vastavektoria ja päädytään pisteeseen (2,–3). Vektorin $\bar{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ origosta alkava edustaja yhdistää siten origon ja pisteen (2, –3).



Tässä, kuten ortonormitetussa tasotapauksessa aina muulloinkin, vektori ja sen vektorikomponentit muodostavat suorakulmaisen kolmion, josta vektorin pituus on helposti laskettavissa. Komponentit ovat kolmiossa aina kateetit ja itse vektori on sen hypotenuusa. Esimerkin tapauksessa on siis

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

ja yleisesti on voimassa

****

Lause 6 Olkoot $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$. Tällöin $|\bar{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$.

****

Seuraavassa kerrotaan, mitä tarkoittaa laskennallisissa sovellutuksissa erittäin hyödyllinen käsite, pisteen paikkavektori. Tämä käsite jo sinänsä ajattelevalle ihmiselle sanoo, että tässä pitäisi nyt olla saatavissa oleellista tietoa pisteen sijainnista:

****

MÄÄRITELMÄ 6 Origosta O alkavaa ja pisteeseen A = (a_x, a_y) päättyvää

suuntajanaa $\overrightarrow{OA}$ sanotaan pisteen A **paikkavektoriksi**.

Reaaliluvut a_x ja a_y ovat suoraan tämän vektorin skalaarikomponentit kannassa $(\hat{i}, \hat{j})$.

Kääntäen: **Jos** muotoa $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ olevan vektorin **alkupiste on origo, n**iin vektorin **loppupiste** on (a_x, a_y).

****

Esim. 4 Piste B = (19,–45). $\overrightarrow{OB} = 19\hat{i} - 45\hat{j}$.

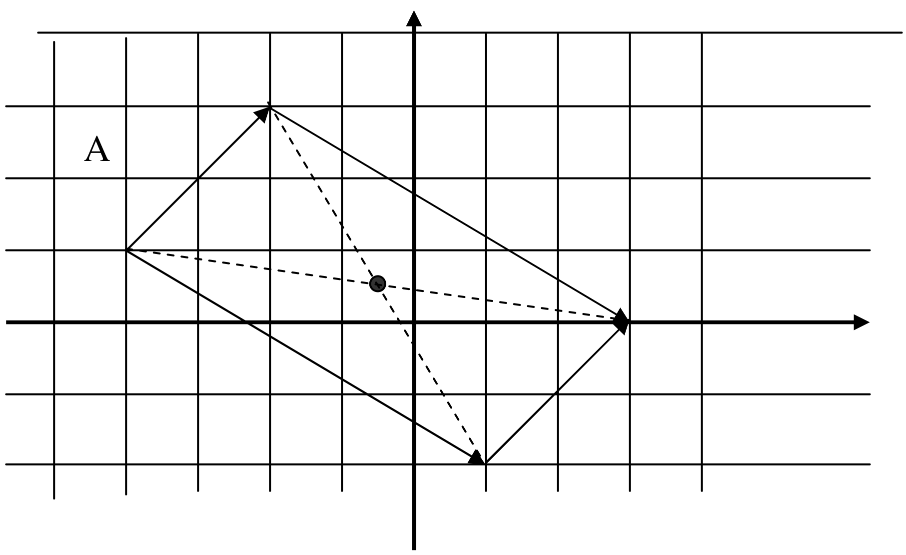
Esim. 5 Vektori $\bar{s} = 4\hat{i} - 4½\hat{j}$ alkaa pisteestä (–5,3). Missä on vektorin loppupiste??

Suoritus ei ole minkään arvoinen, jos tuloksen katsoo (paitsi laskujen tarkistamismielessä) kuviosta. Lasketaan tulos käyttäen paikkavektoria. Olkoot vektorin $\bar{s}$ loppupiste B, jolloin $\bar{s} = \overrightarrow{AB}$, ja A = (–5,3). Yhtälö $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ esiintyy jatkossa useinkin, ja kun siihen tässä sijoitetaan tarpeelliset tiedot, saadaan $\overrightarrow{OB} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{i} - 4½\hat{j} = -\hat{i} - 1½\hat{j}$, joten B = $(-1, -1½)$.

Esim. 6 Suunnikkaan ABCD virittävät pisteestä A = (–4, 1) alkavat vektorit $\bar{a} = \overrightarrow{AB} = 5\hat{i} - 3\hat{j}$ ja $\bar{b} = \overrightarrow{AD} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$. Määritä suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste E.

Tässä tarvitset sen tiedon, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Yksi lävistäjä on $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \bar{a} + \bar{b}$, ja lävistäjän puolikasta edustaa suuntajana $½\overrightarrow{AC} = \dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{2} = \overrightarrow{AE}$. Kun on määrättävä pisteen E koordinaatit, siihen päästään määräämällä pisteen E paikkavektori $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = -4\hat{i} + \hat{j} + \dfrac{1}{2}(5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{i} + 2\hat{j}) = -½\hat{i} + ½\bar{j} = \dfrac{-\hat{i} + \hat{j}}{2}$.

Lävistäjät puolittavat toisensa pisteessä $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Piirroksesta suoritettu tarkistus on hyvässä sopusoinnussa laskemalla saadun tuloksen kanssa. Koordinaatistossa yksi ruutu vastaa yhtä pituuden yksikköä.

Olkoot koordinaatiston kaksi mielivaltaista pistettä $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$.
Tutusta yhtälöstä $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ saadaan ottamalla huomioon, että $\vec{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ ja $\vec{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$ suuntajanan $\vec{AB}$ komponenttiesitys

$$\vec{AB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} - x_1\hat{i} - y_1\hat{j} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}.$$

Tämän suuntajanan pituus = janan AB pituus saadaan nyt helposti Pythagoraan lauseella, kun tiedetään, että vektori ja sen vektorikomponentit ortonormitetussa kannassa muodostavat suorakulmaisen kolmion; lause 6.

Olkoot janan AB keskipiste P. Tällöin kolmion OAB mediaanille OP saadaan lauseen 5.3 nojalla

$$\vec{OP} = \frac{1 \cdot \vec{OA} + 1 \cdot \vec{OB}}{2} = \frac{x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + x_2\bar{i} + y_2\bar{j}}{2} = \frac{(x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j}}{2}$$

Suoritettujen tarkastelujen pohjalta voidaan kirjoittaa jo analyyttisenkin geometrian puolelta tutuksi käynyt tulos janan pituuden ja sen keskipisteen koordinaattien laskemiseksi

****

Lause 7 Olkoot $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ kaksi mielivaltaista xy-tason pistettä.

Janan AB pituus = $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ja

keskipisteen P koordinaatit $x_o = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_o = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

****

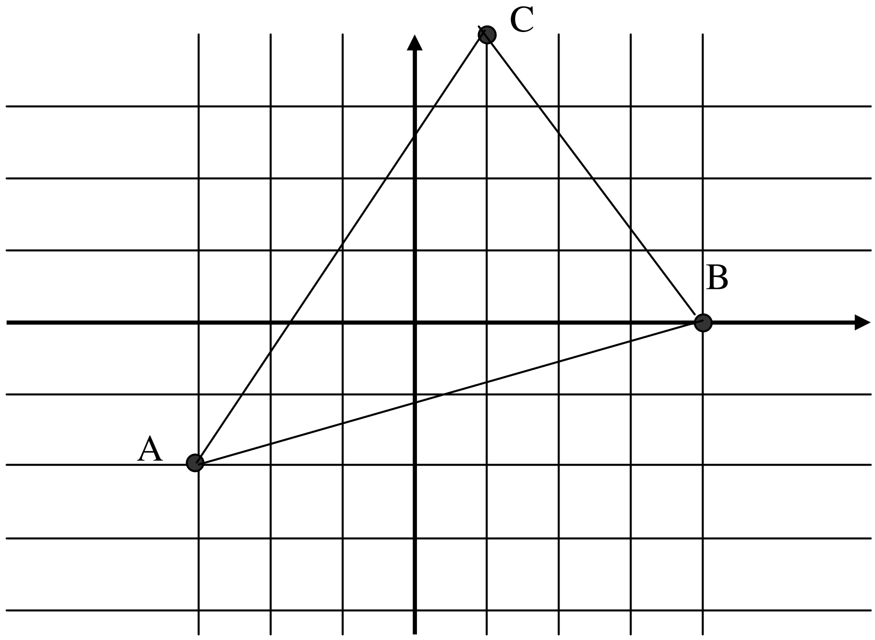
Esim. 7 Kolmion ABC kärjet ovat A = (−3,−2), B = (4,0) ja C = (1,4). Laske sivujen pituudet.

$$AB = \sqrt{(4-(-3))^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53} = 7{,}28... \approx 7.3$$

$$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$CA = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{16+36} = 7{,}21... \approx 7.2$$

Kolmio on varsin lähellä tasakylkistä.



Esitetyn kaltaisen esimerkin suorittaminen ei tietenkään edellytä minkäänlaista piirustusta, mutta kun kärkipisteiden koordinaatit on annettu, kolmion voi hyvinkin tarkasti piirtää. Kuviosta voi mitata sivujen pituudet ja täysin laskelmista riippumattomalla tavalla kontrolloida, ovatko laskut menneet oikein.

TÄLLAISEN TARKISTUSMENETTELYN LIITTYMINEN SUORITUKSEEN NOSTAA AINA SUORITUKSEN ARVOA. Onhan kasvatuksen yksi tavoite opettaa arvioimaan kriittisesti ei ainoastaan toisten vaan omiakin tekeleitään.