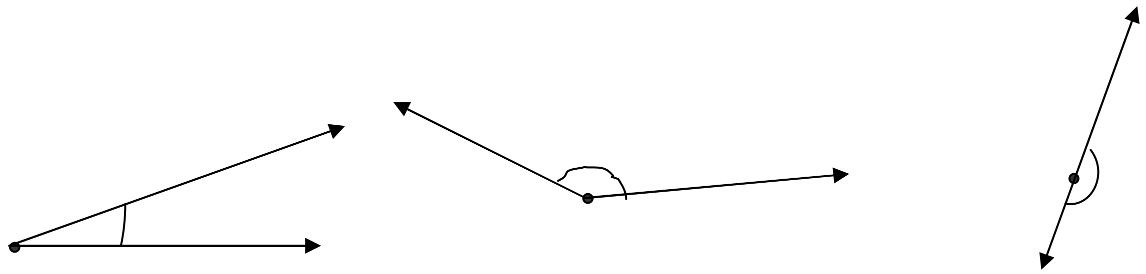
5 Pistetulo ja sen sovellutuksia

Kun kahdella vektorilla, $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on yhteinen alkupiste, niiden määräämät puolisuorat jakavat tason kahteen osaan, kahteen kulmaan, jotka ovat toistensa eksplementtikulmia, siis kulmia, joiden astelukujen summa on 360. Vektoreiden välinen kulma, jota merkitään $(\bar{a},\bar{b})$, tarkoittaa näistä kahdesta eksplementtikulmasta pienempää, joten vektoreiden välinen kulma voidaan aina rajoittaa välille $\left[0^{o}, 180^{o}\right]$. Erikoisesti on

- $(\bar{a},\bar{b}) = 0^{o}$, kun $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$,
- $(\bar{a},\bar{b}) = 180^{o}$, kun $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ ja



****
MÄÄRITELMÄ 7

Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo eli skalaaritulo

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a},\bar{b})$$

****

Tämä on siis pistetulon määritelmä. Se antaa kahden vektorin sellaisen tulon, jonka lopputulos on skalaari; tulon tekijöinä ovat tulontekijävektoreiden pituudet sekä niitten välisen kulman kosini.

Esim. 1

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = |\bar{i}| \cdot |\bar{i}| \cos(\bar{i},\bar{i}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^{o} = 1$$

$$\bar{j} \cdot \bar{i} = |\bar{j}| \cdot |\bar{i}| \cos(\bar{j},\bar{i}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^{o} = 0$$

Pistetuloa ei käytännössä juurikaan määritelmän mukaan lasketa. Määritelmä on silti muistettava, sillä sitä joudutaan varsin usein sovellutuksissa käyttämään erittäinkin vektoreiden välisen kulman määrittämiseen, kun komponenttimuotoisten vektoreiden varsinaisen pistetulon laskemiseen johdetaan kohta kätevä laskukaava toista tietä.

Sitä ennen käsitellään kuitenkin pistetulon ominaisuuksia koskeva

****

Lause 8

$$1^{\circ} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$$

$$2^{\circ} \quad \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$$

$$3^{\circ} \quad (r\overline{a}) \cdot (s\overline{b}) = rs(\overline{a} \cdot \overline{b})$$

Ykköskohdan mukaan pistetulo on vaihdannainen, kakkoskohdan mukaan osittelulaki on voimassa ja kolmoskohtaa sanotaan skalaaritekijän siirtosäännöksi.

Tod.:

2° sivuutetaan, koska vaatii vektoriprojektion käyttöönottoa

3° Olkoot esimerkiksi r ja s molemmat positiivisia. Silloin

$$(r\overline{a}, s\overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b}),$$

joten kulmien kosinitkin ovat yhtä suuret. Koska

$$|r\overline{a}| = r|\overline{a}| \text{ ja } |s\overline{b}| = s|\overline{b}|,$$

niin soveltamalla pistetulon määritelmää kohdan 3° kumpaankin puoleen saadaan samat lausekkeet.

Tapaukset $r < 0, s > 0$ ja $r < 0, s < 0$ sekä vielä $r > 0, s < 0$ käsitellään kukin erikseen. Kahdessa niistä tarvitaan trigonometriasta tuttua tietoa $\cos(180^{\circ} - v) = -\cos v$

Kokeile! Harjoitustehtäväksi!!

****

Määritelmän nojalla voidaan kirjoittaa heti lause, josta on paljon hyötyä laskennallisissa tehtävissä:

****

Lause 9

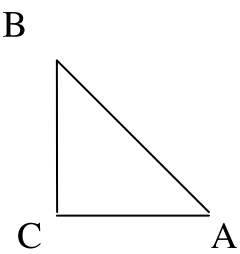
Jos $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ molemmat ovat nollasta eroavia vektoreita, niin

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$$

Tod.: Pistetulon määritelmässä esiintyy kolme lukua. Niiden tulo on nolla täsmälleen silloin, kun ainakin yksi niistä on = 0. Koska oletuksen mukaan tekijävektorit eroavat nollasta, tulo voi olla nolla ainoastaan siinä tapauksessa, että vektoreiden välisen kulman kosini on nolla. Yhtälön cosx = 0 ratkaisuista ainoastaan 90° on sellainen, joka kelpaa vektoreiden väliseksi kulmaksi.

****

Esim. 2 ABC on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, missä kateetit ovat = a ja suora kulma on pisteessä C. Laske $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



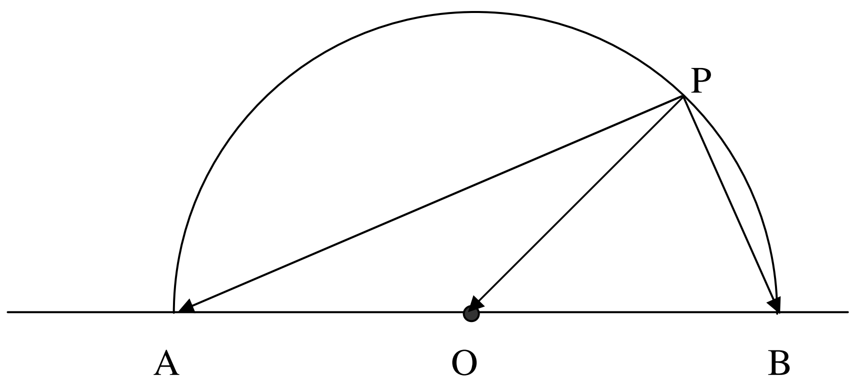
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a\sqrt{2} \text{ ja } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^{\circ}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos 45^{\circ} = a\sqrt{2} \cdot a \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2.$$

Esim. 3 Osoita vektoreita käyttäen, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

Olkoon $\overrightarrow{PA} = \overline{u}, \overrightarrow{PO} = \overline{r}, \quad \overrightarrow{PB} = \overline{v}$ ja vielä $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \overline{d}$. Muodostetaan suuntajanojen $\overrightarrow{PA}$ ja $\overrightarrow{PB}$ eli vektoreiden $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen pistetulo. Nämä eivät voi olla nollavektoreita. Lausutaan ne $\overline{r}$:n ja $\overline{d}$:n avulla:

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{PO} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{r} - \overline{d}$. Vastaavasti saadaan $\overrightarrow{PB} = \overline{v} = \overline{r} + \overline{d}$ ja nyt $\overline{u} \cdot \overline{v} = (\overline{r} - \overline{d}) \cdot (\overline{r} + \overline{d}) = \overline{r} \cdot \overline{r} + \overline{r} \cdot \overline{d} - \overline{d} \cdot \overline{r} - \overline{d} \cdot \overline{d} =$ $\left|\overline{r}\right|^2 - \left|\overline{d}\right|^2$. Lauseke $\left|\overline{r}\right|^2 - \left|\overline{d}\right|^2$ on vektoreiden $\overline{r}$ ja $\overline{d}$ pituuksien neliöiden erotus. Nämä vektorit ovat yhtä pitkät, vaikkakaan eivät ole saman suuntaiset. Kyseinen erotus saa siten arvon nolla. Tämä erotus on samalla kehäkulman kylkivektoreiden pistetulon arvo. Kun pistetulo häviää, niin nollasta eroavat tekijävektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



****

Lause 10

Olkoot $\overline{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ ja $\overline{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$ .Tällöin

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Tod.: Lasketaan pistetulo laskulakeihin nojautuen ihan raakasti aukikertomalla:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) =$$
$$= (a_x\hat{i})\cdot(b_x\hat{i}) + (a_x\hat{i})\cdot(b_y\hat{j}) + (a_y\hat{j})\cdot(b_x\hat{i}) + (a_y\hat{j})\cdot(b_y\hat{j}) =$$
$$= (a_x b_x)(\hat{i}\cdot\hat{i}) + (a_x b_y)(\hat{i}\cdot\hat{j}) + (a_y b_x)(\hat{j}\cdot\hat{i}) + (a_y b_y)(\hat{j}\cdot\hat{j}) =$$
$$= a_x b_x + a_y b_y,$$

onhan nyt $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = 1$ ja $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = 0$.

****

Todistetun lauseen avulla on pistetulon laskeminen huomattavasti vaivattomampaa kuin määritelmän mukaan.

Esim. 4 Jos $\bar{a} = 3\hat{i} - \hat{j}$ ja $\bar{b} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$, niin $\bar{a}\cdot\bar{b} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5 = 6 - 5 = 1$

Esim. 5 Olkoon $\bar{a} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$ ja $\bar{b} = 5\hat{i} - 12\hat{j}$. Määritä sadasosa-asteen tarkkuudella annettujen vektoreiden välinen kulma.

Pistetulon määritelmästä voidaan ratkaista vektoreiden välisen kulman kosini:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a},\bar{b}) \Leftrightarrow \cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{4\cdot 5 + (-5)(-12)}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{80}{13\sqrt{41}},$$

josta $(\bar{a},\bar{b}) = 16.0399....^\circ \approx 16.04^\circ$. (Kuvio! Tarkistus!!)

****

Lause 11 Vektorin pituus = neliöjuuri sen pistetulosta itsensä kanssa

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$$

Tod.: Pistetulon määritelmään sijoittamalla saadaan suoraan

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2\cdot\cos 0 = |\bar{a}|^2$$, josta tulos jo näkyykin.

****

Sovella tätä tulosta eräässä harjoitustehtävässä. Aivan mekaanisesti!