6 Vektorin projektio

Geometriasta muistetaan, että pisteen projektio annetulla suoralla on pisteestä suoralle piirretyn normaalin ja kyseisen suoran leikkauspiste. Janan projektio suoralla tarkoittaa päätepisteiden projektioiden välistä janaa (kyseisellä suoralla).

Mitenkähän oikeanpuoleisessa kuvassa saadaan projisoidun mustan janan pituus, jos projisoitavan, vinon janan pituus tunnetaan? Voisikos janan projektio suoralla olla joskus janan itsensä mittainen ja joskus ehkä aivan onnettoman lyhyt, nolla?

Astetta syvällisempi kysymys voisi olla, mitä tarkoittaa vektorin projektio toisella vektorilla. Voihan se vektori, jolle projisoidaan, olla vaikka hyvin lyhyt!!!

****

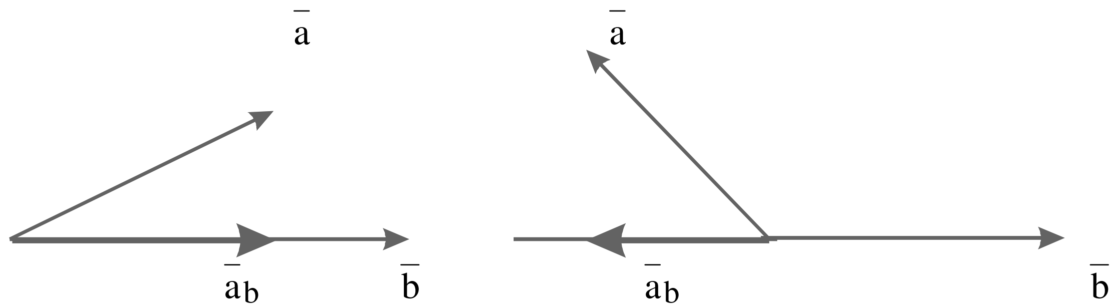
MÄÄRITELMÄ 8

Sitä vektoria, jonka alku- ja loppupisteinä ovat vektorin $\bar{a}$ alku- ja loppupisteet vektorin $\bar{b}$ määräämällä suoralla, sanotaan vektorin $\bar{a}$ projektiovektoriksi vektorilla $\bar{b}$ (lyhyesti vain $\bar{a}$:n projektio $\bar{b}$:llä), ja sitä merkitään $\bar{a}_b$.

****

Koska vektorit eivät miksikään muutu yhdensuuntaisuussiirroissa, voidaan vektorit ilman muuta asettaa alkamaan samasta pisteestä. On kuitenkin hyvä syy huomata, että nollavektorille ei voi mitään projisoida, koskei se määrää mitään suuntaakaan. Sen sijaan nollavektorin voi tietysti projisoida ja sen projektio on aina nolla.

Kun määritetää janan projektiota suoralla, voidaan jana siirtää suuntansa säilyttäen niin, että sen toinen päätepiste tuli projisoitavalle suoralle ilman, että projektio muuttuu. Tällaisessa tilanteessa jana, projektio ja janan ei-suoralla sijaitsevan päätepisteen kautta suoralle piirretty normaali rajoittavat suorakulmaisen kolmion, josta projektio saadaan alkeistrigonometriaa käyttäen janan ja suoran välisen kulman kosinin sekä janan pituuden tulona. Vastaavaa todennäköisesti tulee vastaan myös vektoriprojektion tapauksessa, ja vektoreiden välisen kulman kosini viittaa luonnollisesti pistetuloon, jossa se esiintyy.



Sikäli, kun projektiovektori ei ole nolla, se on aina yhdensuuntainen sen vektorin kanssa, jolle projisoidaan. Voidaan heti todeta tarkemminkin, että

$$\bar{a}_b \uparrow\uparrow \bar{b}, \text{ kun } 0^\circ \le (\bar{a},\bar{b}) < 90^\circ$$

$$\bar{a}_b \uparrow\downarrow \bar{b}, \text{ kun } 90^\circ < (\bar{a},\bar{b}) \le 180^\circ$$

$$\bar{a}_b = \bar{0}, \text{ kun } \bar{a} \perp \bar{b}$$

Kun vektoreiden välinen kulma on suoraa kulmaa pienempi, niin projektiovektorin **pituus**, jota merkitään a_b ja sanotaan $\bar{a}$:n **skalaariprojektio**ksi $\bar{b}$:llä, saadaan seuraavasti:

$$\frac{a_b}{|\bar{a}|} = \cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \Leftrightarrow a_b = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Vektorin **pituudesta** päästään itse vektoriin kertomalla se suuntaisellaan yksikkövektorilla, joka taas on vektori jaettuna pituudellaan, tässä tapauksessa $\hat{b} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$,

joten itse projektiovektori $\bar{a}_b = a_b \hat{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}} \bar{b}$.

Tilanne ei ole paljonkaan kummallisempi, jos vektoreiden välinen kulma on tylppä. Tällöin projektio on vastakkaissuuntainen sille vektorille, jolle projisoidaan, mutta pistetulon negatiivisuus ”hoitelee” projektiovektorin suunnan. Tällöin skalaariprojektio on nyt negatiivinen.

Kootaan tulos ja saadaan

****

Lause 12 Vektorin $\bar{a}$ vektoriprojektio vektorilla $\bar{b}$

$$\bar{a}_b = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b}$$

ja vektorin $\bar{a}$ skalaariprojektio vektorilla $\bar{b}$

$$a_b = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

****

Esim. 1 Olkoot $\bar{a} = 4\hat{i} + 6\hat{j}$ ja $\bar{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$. Määritä $\bar{a}_b$, $\bar{b}_a$ ja b_a.

Suoritus on puhdas kaavaan sijoitus:

$$\bar{a}_b = \frac{(4\hat{i} + 6\hat{j}) \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j})}{|-2\hat{i} + 3\hat{j}|^2}(-2\hat{i} + 3\hat{j}) = \frac{-8 + 18}{(-2)^2 + 3^2}(-2\hat{i} + 3\hat{j}) = \frac{10}{13}(-2\hat{i} + 3\hat{j})$$

$$\bar{b}_a = \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|^2}\bar{a} = \frac{-8+18}{4^2+6^2}(4\hat{i}+6\hat{j}) = \frac{10}{52} \cdot 2(2\hat{i}+3\hat{j}) = \frac{5}{13}(2\hat{i}+3\hat{j})$$

$$b_a = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{-8+18}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{10}{\sqrt{52}} = \frac{10}{2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13},$$

ja laskut on helppo tarkistaa oikeassa mittakaavassa suoritetusta piirroksesta. Huomataan laskuista, että $\bar{a}_b$ on lähes sama kuin $\bar{b}$, mikä seuraavalle sivulle piirretystä kuviostakin äkkiä näkyy. Yhden ruudun sivu kuviossa on kahden pituusyksikön mittainen.

Vaikka projektion käsitteessä ei ole aikaa viipyä, sen merkitys vektorilaskennassa on varsin suuri ja fysiikassa sillä on melkoinen määrä käytäntöä sovellettavaksi. Saatetaan tämä asia huomata, jos johdetaan pisteen etäisyys suorasta tai tasosta.