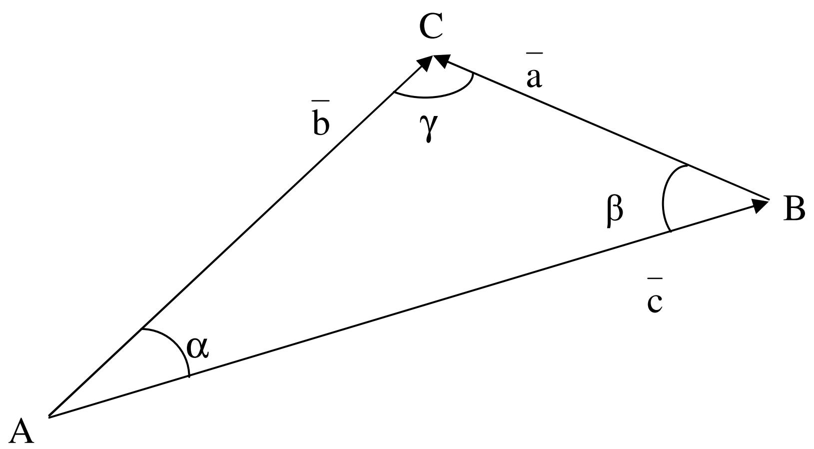
7 Kosinilause

Kosinilause liittyy kolmion ratkaisemiseen kuten Pythagoraan lause tai sinilause. Sinilausetta ei kuitenkaan voi käyttää ainakaan silloin, jos kolmiosta ei tunneta ainoatakaan kulmaa, mutta kylläkin kaikki sivut.

Piirretäänpä taas kolmio, mielivaltainen ja standardimerkinnöin.



Sivut edustavat kolmea vektoria seuraavasti: $\overrightarrow{AB} = \bar{c}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \bar{b}$ ja on kolmiossa voimassa mm. vektoriyhtälö $\bar{c} + \bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$. Tässä yhtälössä $\bar{b} - \bar{c}$ ja $\bar{a}$ ovat siis sama vektori. Muodostetaan tämän vektorin pistetulo itsensä kanssa kahta esitysmuotoa käyttäen, jolloin tullaan yhtälöön $\bar{a} \cdot \bar{a} = (\bar{b} - \bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{c})$ ja kun sitten kumpikin puoli kehitellään ja aukikertoillaan käyttäen määritelmää ja johdettuja lauseita, saadaan $|\bar{a}|^2 = \bar{b} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{c} - \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{c} = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - 2\bar{b} \cdot \bar{c}$ eli

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - 2|\bar{b}||\bar{c}|\cos(\bar{b}, \bar{c}).$$

Kun vielä otetaan huomioon, että $|\bar{a}| = a$, $|\bar{b}| = b$, $|\bar{c}| = c$ ja $\cos(\bar{b}, \bar{c}) = \cos\alpha$, niin saatu yhtälö siistiytyy muotoon

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Muokkaamalla yhtälöä $\bar{c} + \bar{a} = \bar{b}$ kahdella tavalla siten, että vuorollaan vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ esiintyvät yksinään sen toisella puolella ja muodostamalla sitten yhtälön kummallakin puolella esiintyvien vektorien pistetulot itsensä kanssa eli määrit-

tämällä ao. vektoreiden pituuksien neliöt, saadaan kaksi muutakin yhtälöä. Tulos tunnetaan kosinilauseena.
****

Lause 13 **Kosinilause**

Jos kolmiossa ABC on AB = c, BC = a ja AC = b sekä kulmat A = α, $B = \beta$ ja $C = \gamma$, niin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

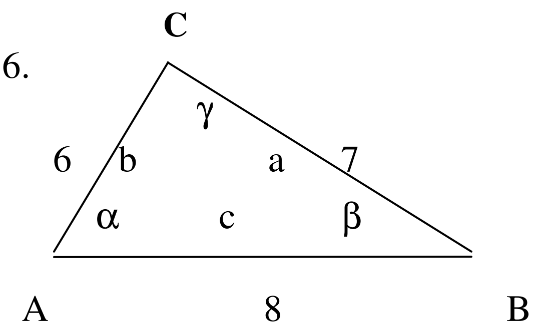
****

Kertaa geometriasta, kuinka kosinilause siellä johdettiin. Kumpi johto on helpompi? Muistisääntönä kannattaa panna merkille, että se sivu, joka yksinään esiintyy vasemmalla, ei esiinny oikealla, mutta vastaavalla kreikkalaisella kirjaimella merkitty kulma sen sijaan oikealta puolelta aina löytyy. Korostettakoon kuitenkin taas kerran, että tämä pätee vain standardimerkinnöin konstruoidulle kolmiolle.

Kannattaa vielä huomata sekin, että jos jokin esiintyvistä kulmista on suora, asianomainen yhtälö kutistuu Pythagoraan lauseeksi, jota näin voidaan pitää kosinilauseen erikoistapauksena.

Esim. 1 Kolmion sivut ovat 6,7 ja 8. Laske kulmien asteluvut sadasosa-asteen tarkkuudella.

Tässä AB = c = 8, BC = a = 7 ja AC = b = 6.
Kulmat A = α, $B = \beta$ ja $C = \gamma$.



$7^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$, josta

$96\cos\alpha = 36 + 64 - 49 \quad \Leftrightarrow$

$\cos\alpha = \frac{51}{96} = 0{,}53125$, josta $\alpha = \pm 57,910... + n \cdot 360^{o}$,

ja näistä kulmista ainoastaan $57{,}91^{0}$ kelpaa kolmion kulmaksi. Sovelletaan kosinilausetta uudelleen

$6^2 = 7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot \cos\beta \Leftrightarrow 112\cos\beta = 49 + 64 - 36 \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{77}{112} = 0.6875$,

josta $\beta = \pm 46,567... + n \cdot 360^{o}$ ja siis vain $46{,}57^{o}$ kelpaa.

Kerran vielä pojat (Juha Watt Vainio):

$8^2 = 6^2 + 7^2 - 2\cdot 6\cdot 7\cdot \cos\gamma \Leftrightarrow 84\cos\gamma = 36 + 49 - 64 \Leftrightarrow 84\cos\gamma = 21 \Leftrightarrow$

$\cos\gamma = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$, josta $\gamma = \pm 75,522... + n \cdot 360^{o}$

Tarkistetaan $\alpha + \beta + \gamma = 57.91 + 46.57 + 75.52 = 180.00$

Vastaus: Kulma A = 57.91^{o}, kulma $B = 46.57^{o}$ ja kulma C = 75.52^{o}.