8 Vektoreiden käyttöä todistustehtävissä

Edellä käsitellyssä teoriassa on jo käsitelty joitain todistustehtäviä, jopa todistettu oikeiksi useita perustavaa laatua olevia teorian kohtia, kuten kosinilause tai kolmion keskijanojen leikkauspistettä koskeva tosiasia. Johdetaan analyyttisen geometrian puolella ilmoitusasiaksi jäänyt **pisteen etäisyys suorasta.**

Lienee ilmeinen tosiasia, että minkä tahansa suoran suunta voidaan antaa paitsi suuntakulman myös nollasta eroavan vektorin avulla. Suora y = kx kulkee paitsi origon, myös pisteen (1,k) kautta. Viimemainitun pisteen paikkavektori on $\hat{i} + k\hat{j}$, ja tämä vektori määrää suoran y = kx suunnan. Erikoistapauksessa suora saattaa olla y-akselin suuntainen, jolloin sen suunnan määrää yksikkövektori $\hat{j}$. Kun suora yhdensuuntaisuussiirrossa säilyy suunnaltaan muuttumattomana, niin $\hat{i} + k\hat{j}$ antaa suoran y = kx + b suunnan olipa b mikä tahansa.

Saatetaan suoran yhtälön yleinen muoto ax + by + c = 0 ratkaistuun muotoon, mikä onnistuu, jos kerroin b ei ole nolla. Mikäli on, suora on y-akselin suuntainen. Saadaan näin $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Edellä esitetyn mukaan $\hat{i} - \frac{a}{b}\hat{j}$ ja nimenomaan tämän kanssa yhdensuuntainen vektori $\bar{s} = b\hat{i} - a\hat{j}$ antaa suoran ax + by + c = 0 suunnan, ja antaa sen silloinkin, kun b = 0. Kun suorasta yleisesti puhutaan, on kai syytä sulkea pois sellainen erikoisuus, missä a ja b olisivat molemmat nollia.

Jos sitten muodostetaan nollasta eroavien vektoreiden $\bar{s} = b\hat{i} - a\hat{j}$ ja $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j}$ pistetulo $\bar{n} \cdot \bar{s}$, huomataan sen häviävän. Tällainen ominaisuus merkitsee vektoreiden keskinäistä kohtisuoruutta.

****

Lause 14

Olkoon suoran yhtälössä ax + by + c = 0 ainakin toinen kertoimista a ja b nollasta eroava. Tällöin aina voidaan valita suoran

- suuntavektoriksi $\bar{s} = b\hat{i} - a\hat{j}$ ja
- normaalivektoriksi $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j}$.

****

Ilmeisesti ainakin normaalivektoria koskeva tulos on helppo muistaa ulkoa jo senkin takia, että tulos auttaa kolmiulotteisen avaruuden asioita käsiteltäessä.

Olkoon nyt piste $P_0 = (x_0, y_0)$ eräs xy-tason piste ja $ax + by + c = 0$ tämän tason mielivaltainen suora. Olkoon vielä piste $P = (x,y)$ sanotun suoran mielivaltainen piste.

****

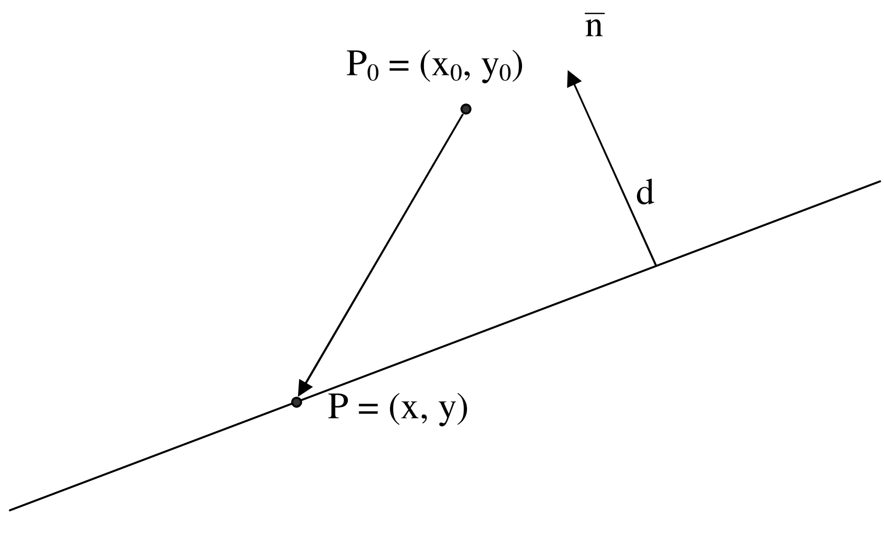
Lause 15

Pisteen $P_0 = (x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on vektorin $\overrightarrow{P_0P}$ skalaariprojektion itseisarvo suoran normaalivektorilla $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j}$.

Tod.:

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} \ .$$

Lauseen 5.12. tulos $a_b = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$ antaa käsittelyssä olevaan asiaan sovellettuna, jotta



$$P_0P_n = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{\left[(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j}\right] \cdot (a\hat{i} + b\hat{j})}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{ax - ax_0 + by - by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Piste (x,y) on suoralla ax + by + c = 0. Sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön, joten ax + by = –c . Sijoitetaan tämä yllä saatuun ja huomioidaan samalla väitteessä vihjaistun etäisyyden käsitteen positiivisuuden perusteella se, että koska skalaariprojektio saattaa olla negatiivinen, ei se voi silloin antaa etäisyyttä, mutta kylläkin etäisyyden vastaluvun. Itseisarvon käyttö kattaa koko kentän:

$$d = \left|P_0P_n\right| = \frac{|ax + by - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

****

Esim. 1 Millä vakion c arvoilla suora 5x – 12y + c = 0 on ympyrän $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ tangentti?

Tällaisia tehtäviä ratkaistiin analyyttisen geometrian puolella muodostamalla ensin yhtälöpari, jonka ratkaisuna saatiin suoran ja ympyrän yhteiset pisteet. Näitähän voi olla kaksi, yksi tai ei ollenkaan. Tapauksista keskimmäinen merkitsee sitä, että suora on ympyrän tangentti ja tähän päästään kiinni pakottamalla ratkaisuprosessissa eteentulevan toisen asteen yhtälön diskriminantti nollaksi.

Käytetään tässä yhteydessä nyt toista keinoa; ympyrän tangentti on sellainen suora, josta ympyrän keskipiste on tarkalleen säteen etäisyydellä. Saattamalla ympyrän yhtälö keskipistemuotoon neliöksi-täydentämiskeinoa käyttäen saadaan selville sekä keskipiste että säde.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4 - 1 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Tehtävässä esiintyvän ympyrän säde R = 2 ja sen keskipiste (1, −2). Kirjoitellaan siis yhtälö, joka kertoo pisteen (1, −2) etäisyyden suorasta $5x - 12y + c = 0$ olevan tasan 2.

$$2 = \frac{|5 \cdot 1 - 12 \cdot (-2) + c|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \Leftrightarrow 13 \cdot 2 = |5 + 24 + c| \Leftrightarrow |29 + c| = 26 \Leftrightarrow$$

$$29 + c = 26 \text{ tai } 29 + c = -26 \Leftrightarrow$$

$$c = -3 \text{ tai } c = -55$$