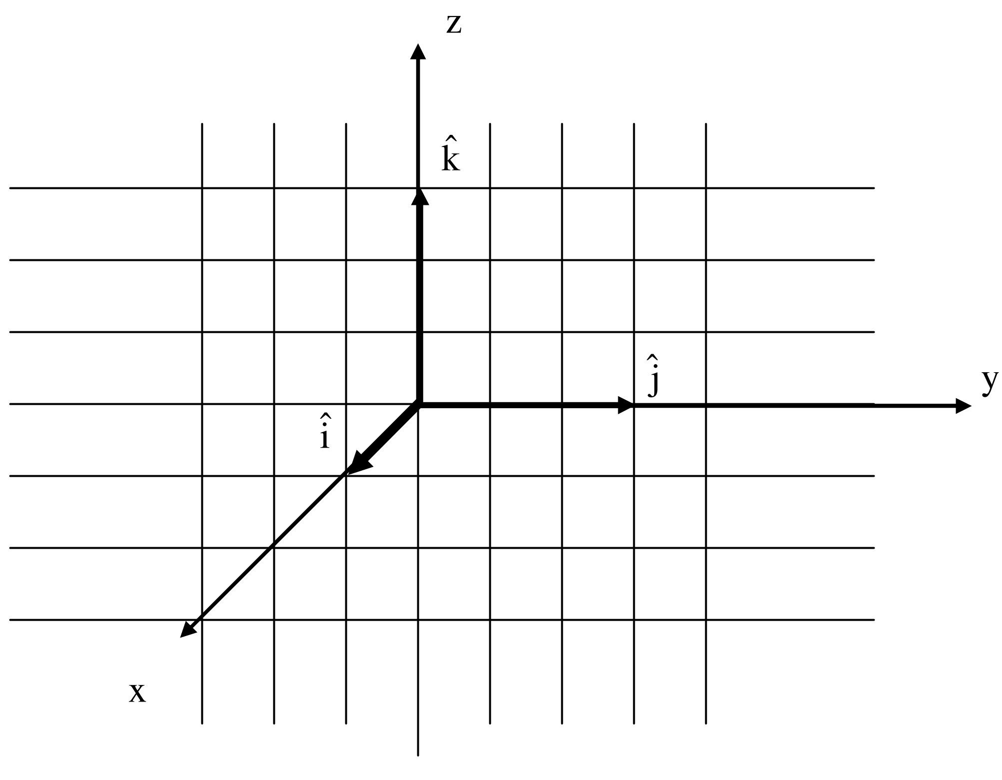
# 9 Kolmiulotteinen koordinaatisto

Pääpiirtein kaikki tasovektorien yleiset ominaisuudet pätevät myös avaruusvektoreille. Siten esimerkiksi kahden vektorin summavektori alkaa edellisen yhteenlaskettavan alkupisteestä ja päättyy jälkimmäisen loppupisteeseen, mikäli summattavat vektorit ovat olleet yhteenlaskuasennossa. Summa on vaihdannainen ja liitännäinen. Pistetulon **määritelmään**kään ei tule mitään uutta.
Uutta on se, että täytyy valita kolmannen koordinaattiakselin suuntainen yksikkövektori, jos avaruusvektoreita tahdotaan jakaa komponentteihin. Avaruuden mielivaltaisella pisteellä on kolme koordinaattia, (x,y,z), jotka luetellaan aina aakkosjärjestyksessä. Yksikkövektori $\hat{k}$ on positiivisen z-akselin suuntainen, jolloin sen origosta alkava edustaja päättyy pisteeseen (0,0,1).

Avaruusvektorin kuvaaminen koordinaatistossa on asteen verran hankalampaa kuin tasossa tapahtuva vektorin havainnollistus. Koordinaattiakseleista piirretään näkyviin vain positiiviset puoliakselit ja piirrostasosta suoraan kohti katsojaa ylösnouseva x-akseli piirretään oheisen kuvion mukaisesti $-135^{o}$ kulmaan positiivisen y-akselin kanssa. Pituusyksikkö x-akselilla on puolet siitä, mitä se on y– ja z–akseleilla. Käytännössä tätä päästään hyvin lähelle ruutupaperia käytettäessä valitsemalla y– ja z–akseleille pituusyksiköksi kolme ruutua ja x-akselille ruudun lävistäjä.



Yksikkövektorit $\hat{i}, \hat{j}$ ja $\hat{k}$ muodostavat **oikeakätisen, ortonormeeratun** systeemin, joka voidaan määritellä näin: pienin kierto, jolla $\hat{i}$ (ensiksi mainittu) muuttuu $\hat{j}$:n (keskimmäisen) suuntaiseksi, näyttää $\hat{k}$:n (viimemainitun) kärjestä katsottuna olevan positiivinen (vastapäivään).

Minkä tahansa avaruuden pisteen paikka voidaan ilmoittaa paitsi koordinaatein, myös paikkavektorin avulla. Näin esimerkiksi pisteen P = (6, −1,9) paikkavektori $\overrightarrow{OP} = 6\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$, ja kun tämä on avaruuslävistäjänä sellaisessa suorakulmiossa, jonka samasta kärjestä lähtevät sivut ovat pituudeltaan 6, 1 ja 9, niin esimerkiksi $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 9^2} = \sqrt{118}$ ja yleisesti on $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, kun on kyseessä vektori $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

Olkoon $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$. Toivottavasti yhtälö

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

on jo käynyt tutuksi:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k} - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}.$$

Jos $P = (x_o, y_o, z_o)$ on janan AB keskipiste, niin on $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$

$$= x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\hat{i} + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\hat{j} + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)\hat{k} =$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{2}\hat{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\hat{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\hat{k}.$$

Yhteenvetona voidaan kirjoittaa

******************************************************************

**Lause 16** Olkoon $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$ kaksi avaruuden mielivaltaista pistettä. Tällöin on

- $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$ ,

- janan AB pituus $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- janan AB keskipisteen koordinaatit

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_o = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_o = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

*****************************************************************

Koska yksikkövektori $\hat{k}$ on kohtisuorassa kahta ennestään tuttua yksikkövektoria $\hat{i}$ ja $\hat{j}$ vastaan, niin pistetulot $\hat{i} \cdot \hat{k}$ ja $\hat{j} \cdot \hat{k}$ häviävät. Kun kerrotaan auki kahden komponenttimuodossa annetun avaruusvektorin välinen pistetulo lauseen 5.10 johdon tapaan, saadaan aivan analogisesti pistetulon kehityskaava

*****************************************************************

**Lause 17** Olkoot $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ ja $\bar{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$. Tällöin

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

*****************************************************************

**Esim. 1** Millä t:n arvoilla vektorin $\bar{a} = (t+1)\bar{i} + t\bar{j} - \bar{k}$ pituus on $\sqrt{2}$?

$$|\bar{a}| = \sqrt{(t+1)^2 + t^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (t+1)^2 + t^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 2t + 1 + t^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow 2t(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1$$

Vastaavat vektorit ovat $\bar{i} - \bar{k}$ ja $\bar{j} - \bar{k}$

**Esim. 2** Kolmiossa ABC on A = (2,3,1), B = (6,5,3) ja C = (−3,7,11). Laske a) kolmion sen mediaanin pituus, joka alkaa kärjestä C
b) kulman A asteluku kymmenesosa-asteen tarkkuudella.

Jos D on sivun AB keskipiste, niin D = $(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{1+3}{2}) = (4,4,2)$.

Tällöin $CD = \sqrt{(4-(-3))^2 + (4-7)^2 + (2-11)^2} =$

$= \sqrt{49+9+81} = \sqrt{139} = 11,789... \approx 11.8.$

$\overrightarrow{AB} = (6-2)\bar{i} + (5-3)\bar{j} + (3-1)\bar{k} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$

$\overrightarrow{AC} = (-3-2)\bar{i} + (7-3)\bar{j} + (11-1)\bar{k} = -5\bar{i} + 4\bar{j} + 10\bar{k}$

$$\cos A = \frac{(4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) \cdot (-5\bar{i} + 4\bar{j} + 10\bar{k})}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 10^2}} = 0,13752.....$$ , josta

$A = 82,0954...^{o} \approx 82.1^{o}$

jotta tulokset voisi mittaamalla tarkistaa, pitäisi malli vääntää rautalangasta.