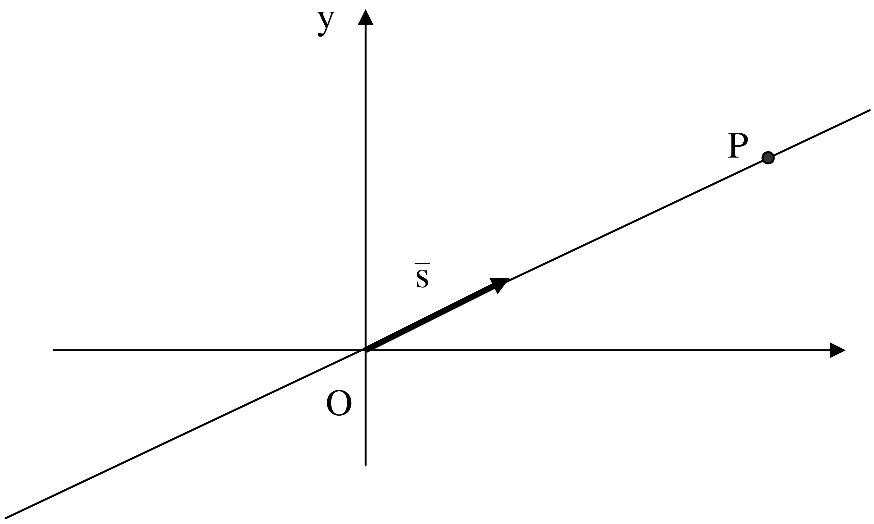
10 Suoran vektorimuotoinen yhtälö

Jos aluksi tarkastellaan xy-tasoon kuuluvaa, origon kautta kulkevaa suoraa, niin suora on täysin määrätty, mikäli tunnetaan sen suunta. Tavallisesti tämä annetaan suuntakulman tangentin = kulmakertoimen k avulla. Suoran suunta voidaan antaa myös suuntavektorin avulla. Tällainen (ei y-akselin suuntainen) suora y = kx kulkee siten esim. pisteen (1,k) kautta, joten suuntavektoriksi voidaan valita $\hat{i} + k\hat{j}$ tai mikä tahansa tämän kanssa yhdensuuntainen vektori. Merkitään tällaista vektoria $\bar{s} = s_x\hat{i} + s_y\hat{j}$.



Välttämätön ja riittävä ehto sille, että piste P = (x,y) on suoralla L, on se, että löytyy reaaliluku t siten, että $\overrightarrow{OP} = \bar{r} = t\bar{s}$. Kun $\bar{r}$ on pisteen P paikkavektori, siis $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, niin em. yhtälö komponenttimuodossa on $x\hat{i} + y\hat{j} = ts_x\hat{i} + ts_y\hat{j}$, josta saadaan suoran yhtälön ns. **parametrimuoto**

Niissä tapauksissa, joissa $s_x \neq 0$, saadaan eliminoimalla t parametrimuotoisesta yhtälöstä uusi yhtälö y = $\frac{s_y}{s_x}$x, josta edelleen merkitsemällä muuttujan x kerrointa = k, pullahtaa ennestäänkin hyvin tuttu yhtälö y = kx.

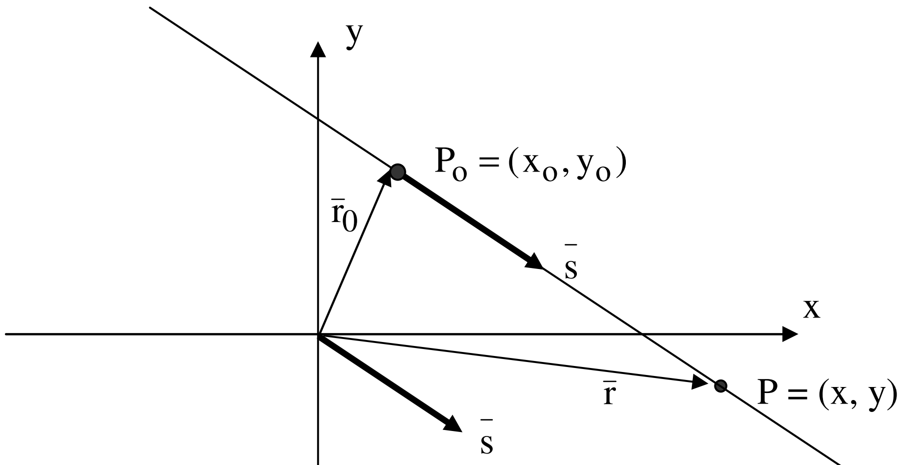
Kannattaa tietenkin huomata, että merkitsemällä suuntavektoria $\bar{s} = s_x\hat{i} + s_y\hat{j}$ kelpaa mikä tahansa tämän kanssa yhdensuuntainen vektori suuntavektoriksi. Tällaiseksi kelpaa vaikkapa vektori $\frac{1}{s_x}\bar{s} = \hat{i} + \frac{s_y}{s_x}\hat{j} = \hat{i} + k\hat{j}$. Tällöin on $\frac{s_y}{s_x}$ = tanα = k, missä α on suoran L ja positiivisen x-akselin välinen terävä kulma. Tämä kulma otetaan negatiivisena, mikäli sen oikea kylki on syntynyt vektorin $\hat{i}$ kiertyessä myötäpäivään eli negatiiviseen kiertosuuntaan.

Origon kautta kulkevaan avaruussuoraan esitetty tarkastelu pätee täysin hyvin. Kuitenkaan tällaiselle suoralle ei määritellä suuntakulmaa ja suuntavektoriin tulee kolmaskin komponentti. Tällöin $\bar{s} = s_x\hat{i} + s_y\hat{j} + s_z\hat{k}$, ja origon kautta kulkevan suoran parametriyhtälöksi saadaan kolmen yhtälön ryhmä

$$\begin{cases} x = ts_x \\ y = ts_y \\ z = ts_z \end{cases},$$

missä t on mikä tahansa reaaliluku.

Olkootpa sitten $L_1 : \bar{r} = t\bar{s}$ origon kautta kulkeva xy-tasoon kuuluva suora ja L_2 tämän suoran suuntainen suora, joka kulkee pisteen $P_o = (x_o, y_o)$ kautta. Jälkimmäisen suoran suuntavektoriksi voidaan ilman muuta valita vektori $\bar{s}$.



Välttämätön ja riittävä ehto sille, että P = (x,y) on suoran L_2 piste, on se, että löytyy reaaliluku t siten, että $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t\bar{s}$, mikä merkitsee vektoriyhtälöä

$$\bar{r} = \bar{r}_o + t\bar{s}$$

minkä komponenttiesitys on

$$x\hat{i} + y\hat{j} = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + ts_x\hat{i} + ts_y\hat{j},$$

josta edelleen päästään parametriesitykseen

$$\begin{cases} x = x_o + ts_x \\ y = y_o + ts_y \end{cases}$$

Mikäli on kyseessä erikoistapaus $s_x = 0$, saadaan tästä y-akselin suuntainen suora $x = x_0$, jonka suuntavektoriksi käy paitsi $s_y\hat{j}$, myös pelkkä $\hat{j}$. Ellei ole kyseessä käsitelty erikoistapaus, parametri t on helppo eliminoida ja saadaan

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{s_y}{s_x} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{s_y}{s_x}(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = k(x - x_0).$$

Kun johdettiin pisteen etäisyyttä suorasta, todettiin, että suoran normaalivektoriksi voitiin valita $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j}$ ja suuntavektoriksi $\bar{s} = -b\hat{i} + a\hat{j}$, ja saadaan sijoituksen ynnä sievennyksen jälkeen jälleen kerran

****

Lause 18

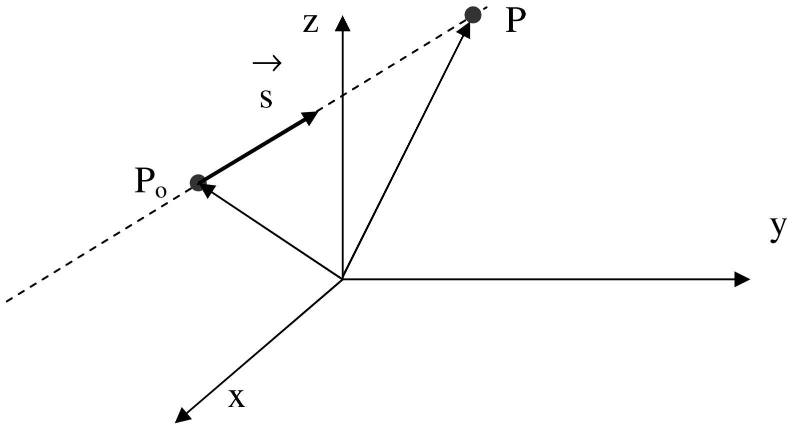
Mikä tahansa xy-tason suora voidaan aina esittää muodossa

$$ax + by + c = 0$$

mikäli ainakin toinen kertoimista a ja b eroaa nollasta.

****

Olkoot nyt $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ avaruuden kiinteä piste ja $\bar{s} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ nollasta eroava vektori. Piste P = (x,y,z) on P_o:n kautta kulkevalla, vektorin $\bar{s}$ suuntaisella suoralla täsmälleen silloin, kun löytyy reaaliluku t siten, että



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t\bar{s} \Leftrightarrow \bar{r} = \bar{r}_o + t\bar{s}$$

Tästä päästään parametrimuotoon

$$\begin{cases} x = x_o + ta \\ y = y_o + tb \\ z = z_o + tc \end{cases}$$

ja parametrin eliminoinnin jälkeen ns. koordinaattimuotoon:

****

Lause 19 Pisteen $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ kautta kulkevan, vektorin $\bar{s} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ suuntaisen suoran yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

edellyttäen, että $abc \neq 0$.

Parametrimuotoinen esitys ei tätä rajoitusta sisällä, mutta vaatii sen, että ainakin yksi suuntavektorin skalaarikomponenteista pitää olla nollasta eroava, koska nollavektorilla ei ole suuntaa.

****

Esim. 1 Suora kulkee pisteiden A = (4, 3, 1) ja B = (6, 7, −5) kautta. Määritä suoran yhtälö, sekä piste, jossa suora kohtaa yz-tason.

Tason suuntavektoriksi voidaan valita $\bar{s} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

$\bar{s} = (6-4)\hat{i} + (7-3)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$.

Suora kulkee pisteen A kautta ja sen suuntavektori on $\bar{s}$. Lause 5.19 antaa:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{-6}.$$

Suora leikkaa yz-tasoa pisteessä, jonka x-koordinaatti on nolla. Muiden koordinaattien määräämiseksi tarvitaan suoran parametrimuotoista yhtälöä: $\begin{cases} x = x_o + ta \\ y = y_o + tb \\ z = z_o + tc \end{cases}$

Sijoitetaan tähän suuntavektorin skalaarikomponentit ja pisteen A koordinaatit (yhtä hyvin B:n koordit)

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

Jos x = 0, niin t = –2. Sijoittamalla tämä muiden koordinaattien lausekkeisiin, päästään tietämään suoran ja yz-tason leikkauspiste:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4(-2) = -5 \\ z = 1 - 6(-2) = 13 \end{cases}$$

Vastaus: Kysytyn suoran yhtälö

normaalimuodossa $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{-6}$

parametrimuodossa $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$

Suora leikkaa yz-tason pisteessä $(0, -5, 13)$.