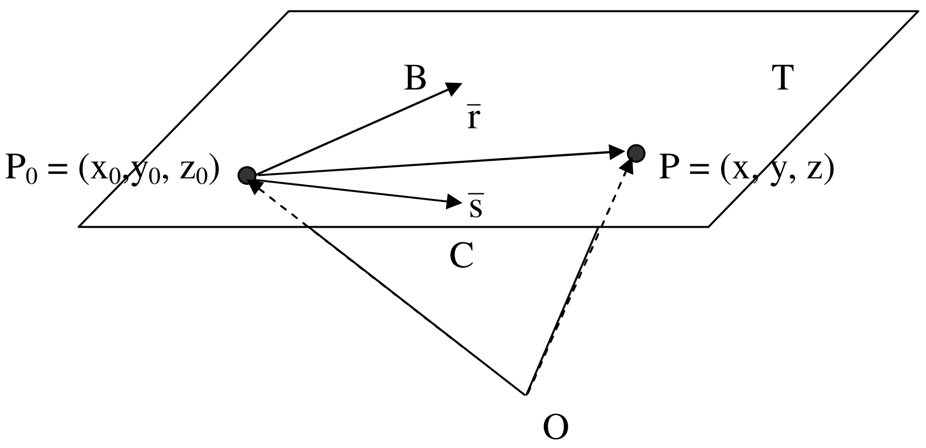
11 Taso

Avaruuden kolme sellaista pistettä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla, määräävät tason. Olkoot nämä pisteet P_0, B ja C. Merkitään vaikkapa $\overrightarrow{P_0B} = \bar{r}$ ja $\overrightarrow{P_0C} = \bar{s}$. Tällöin voidaan sanoa, että vektorit $\bar{r}$ ja $\bar{s}$ **virittävät** (erään) tason T.



Mikä tahansa tasoon T kuuluva vektori voidaan esittää muodossa $k\bar{r} + m\bar{s}$, missä k ja m ovat reaalilukuja. Palautetaan mieleen, että sanotaan vektoreiden $\bar{r}$ ja $\bar{s}$ olevan tämän 2-ulotteisen vektoriavaruuden (= taso T) **kanta** ja luvut k ja m ovat erään tähän tasoon kuuluvan vektorin skalaarikomponentit kannassa $(\bar{r}, \bar{s})$.

Jos sitten P = (x, y, z) on tason T mielivaltainen piste, ja O = origo, niin varmasti löytyy vektoriesitys

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + g\bar{r} + h\bar{s}.$$

Tämä on tason T vektorimuotoinen esitys. Kun g ja h juoksevat kaikki reaaliluvut läpi miinus-äärettömästä äärettömään kaikin mahdollisin variaatioin, niin taso T tulee piirretyksi.

Olkoon tason eräs normaalivektori $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Osataan ehkä jo suoraan kirjoittaa $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$. Nämä kaksi vektoria, $\bar{n}$ ja $\overrightarrow{P_0P}$, ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ja siten niiden pistetulo häviää.

$$\bar{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0,$$

kun on merkitty vakiosta koostuvan tavaran arvoksi d. Siis $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$.

****

Lause 20 Yhtälö

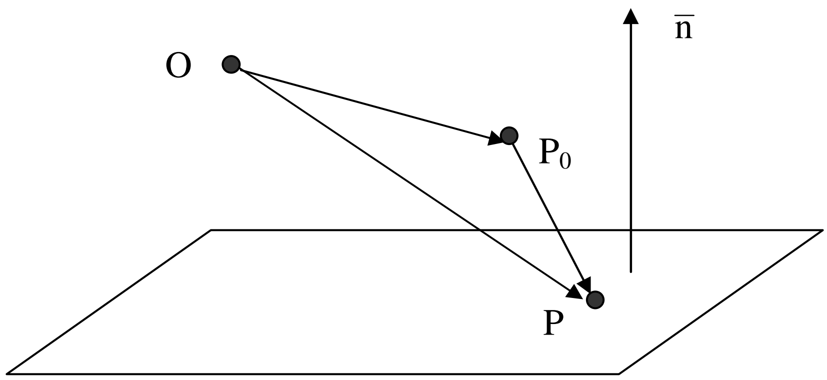
$$ax + by + cz + d = 0$$

esittää tasoa koordinaatistossa, jonka toisiaan vastaan kohtisuorat yksikkövektorit ovat $\hat{i}$, $\hat{j}$ ja $\hat{k}$. Tämän tason eräs normaalivektori

$$\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \ .$$

****

Johdetaan lauseke, josta suoraan voidaan laskea annetun pisteen ja annetun tason välinen etäisyys:



Olkoon tason yhtälö annettu $ax + by + cz + d = 0$, ja olkoon piste $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ se, jonka etäisyys tästä tasosta tahdotaan tietää. Kun merkitään O = origo, ja kun selvästi on voimassa vektoriyhtälö

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} \ ,$$

missä P = (x, y, z) on tason ax + by + cz + d = 0 mielivaltainen piste, niin mitä ilmeisimmin kysytty etäisyys on vektorin $\overrightarrow{P_0P}$ skalaariprojektion itseisarvo tason normaalivektorilla $\bar{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Nyt on

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k},$$

ja kun muistetaan skalaariprojektion laskulauseke $a_b = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$, niin etsittävälle etäisyydelle d saadaan lauseke

$$\begin{aligned} d = P_0P_n &= \left| \frac{\left[(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}\right] \cdot (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})}{|\bar{n}|} \right| = \\ &= \frac{|ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$

missä on sijoitettu ax + by + cz = −d , onhan P = (x, y, z) tasossa oleva piste, ja sen koordinaatit toteuttavat tason yhtälön. Varmaan huomaat, että pisteen tasosta antavan etäisyyden lauseke on hyvin samankaltainen kuin on tason pisteen etäisyys tason suorasta:

****

Lause 21 Pisteen (x_0, y_0, z_0) etäisyys d tasosta ax + by + cz + d = 0 on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

****

Esim. 1 Laske pisteen (2, −3, 1) etäisyys tasosta 3x + 6y – 2z = 5.

Tämä on suora sijoitus:

$$d = \frac{|3\cdot 2 + 6(-3) - 2\cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{|6 - 18 - 2 - 5|}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{|-19|}{\sqrt{49}} = \frac{19}{7}.$$

Esim. 2 Määritä tasojen x + 2y + 3z = 4 ja 4x – 3y + z = 7 yhteiset pisteet.

Tässä on yhtälöpari, mutta kolme tuntematonta. Pystyisikö tästä saamaan kahden tason yhteisten pisteiden välisen yhtälön, avaruussuoran yhtälön?

Eliminoidaan x:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x - 3y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 8y - 12z = -16 \\ 4x - 3y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow -11y - 11z = -9 \Leftrightarrow$$

$$11y + 11z = 9 \Leftrightarrow y = \frac{9}{11} - z$$

Siirrytään parametrimuotoon. Valitaan z = t, missä t saa juosta läpi koko reaalilukujen joukon aina miinus-äärettömästä äärettömään. Tällöin saadaan y = $\frac{9}{11} - t$ ja $x = 4 - 2y - 3z = 4 - \frac{18}{11} + 2t - 3t = \frac{26}{11} - t$. Silloin

$$\begin{cases} x = \frac{26}{11} - t \\ y = \frac{9}{11} - t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - \frac{26}{11}}{-1} = \frac{y - \frac{9}{11}}{-1} = \frac{z}{1}$$

Tulos voitaisiin antaa myös vektorimuodossa, ko. suoran suuntavektoriksi kävisi $\bar{s} = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. Määritetään eräs suoran piste antamalla parametrille t mielivaltainen arvo, vaikkapa t = 0, jolloin x ja y kiinnittyvät. Käytettään tämän jälkeen yhtälöä $\bar{r} = \bar{r}_0 + u\bar{s}$, missä parametri u juoksee reaaliluvut läpi.

Määritellään lopuksi eräitä käsitteitä:

****

MÄÄRITELMÄ 8

Avaruuden suoran ja tason välinen kulma saadaan, kun määritetään ensin suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma ja vähennetään saatu asteluku 90 asteesta.

Kahden tason välinen kulma on tasojen normaalivektoreiden välinen kulma.

****

Esim. 3 Suora kulkee pisteen P = (1, 0, −3) kautta ja sen suuntavektori on $\overline{s} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$. Määritä tason $10x + 3y + 2z - 8 = 0$ ja kyseisen suoran välinen kulma.

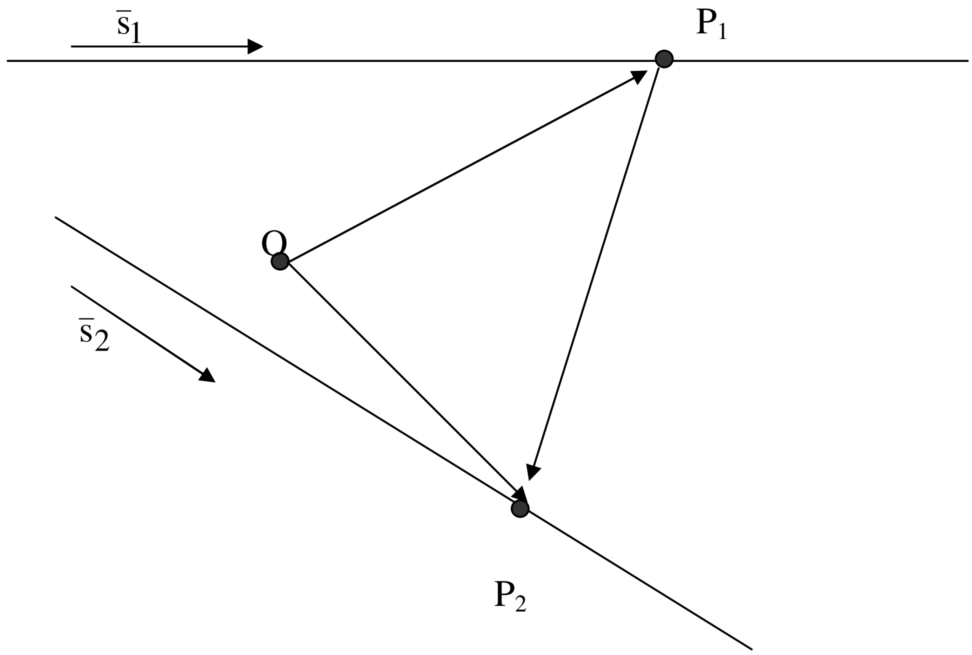
Tason normaalivektori $\overline{n} = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

$$\cos(\overline{n}, \overline{s}) = \frac{10 \cdot 1 + 3(-2) + 2 \cdot 3}{\sqrt{10^2 + 3^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{113}\sqrt{14}} = 0.2514...$$

$$(\overline{n}, \overline{s}) = 75.438...^0 \approx 75.4^0$$

Kaksi avaruussuoraa saattavat olla erisuuntaiset, mutta niiden ei silti tarvitse leikata toisiaan toisin kuin samassa tasossa olevien kahden suoran. Tällöin tavataan sanoa, että suorat ovat **ristikkäiset.** Joskus voidaan kysyä kahden ristikkäisen suoran välistä etäisyyttä.

Tällaisessa probleemassa täytyy valita kumpaiseltakin suoralta piste, mielivaltainen, siis parametrimuodossa ja muodostaa näiden pisteiden välinen suuntajana. Tämän suuntajanan tulee olla kohtisuorassa kummankin suoran suuntavektoria vastaan. Nämä kaksi kohtisuoruusehtoa kiinnittävät pisteiden esityksissä olevat parametrit niin, että kummaltakin suoralta määräytyvät juuri ne pisteet, joiden välinen jana on kaikkein lyhin kaikista niistä janoista, joiden toinen päätepiste on toisella suoralla ja toinen toisella.



$\bar{s}_2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ ja $\bar{s}_1 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$