

MAA5. HARJOITUKSTEN RATKAISUJA

2. Tosia a), b) ja d)

3. Summan itseisarvot a) 17, b) 7 ja c) 13.

4. a) $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, b) $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ c) $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

5. a) $m = 0$ tai $\vec{a} = \vec{0}$ b) $m = 1$ tai $\vec{a} = \vec{0}$ c) $m = n$ tai $\vec{a} = \vec{0}$ d) $m = 0$ tai $\vec{a} = \vec{b}$.

6. Nojaa tulokseen kaksi suuntajanaa ovat sama(n) vektori(n edustajat), jos ovat yhtä pitkät ja samansuuntaiset.

7. $\vec{x} = -2\vec{a} - 9\vec{b}$

8. $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{BQ} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ $\vec{PC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. Näyttävät olevan saman vektorin edustajia.

9. $\vec{PQ} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{QR} = \vec{c} - \vec{b}$. Jos Q = janan PR keskipiste, niin $\vec{PQ} = \vec{QR}$ eli $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$.

10. Pyri lausumaan pienin kirjaimin annetut vektorit nelikulmion ABCD kärkipisteiden välisten suuntajanojen avulla niin, että pystyt nojaamaan tulokseen: Nelikulmio on suunnikas, jos sen molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat sekä yhdensuuntaiset että yhtä pitkät.

13. a) \vec{b} on kaksi kertaa niin pitkä kuin \vec{a} .

b) \vec{a} on kuusi kertaa niin pitkä kuin \vec{b} .

14. a) $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{OD} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ c) $\vec{OE} = -2\vec{b}$

d) $\vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ e) $\vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$

15. a) $\vec{AQ} = \frac{3}{7}\vec{AB}$ b) $\vec{AP} = \frac{1}{6}\vec{AB}$ c) $\vec{PB} = \frac{5}{6}\vec{AB}$

d) $\vec{PQ} = \frac{11}{42}\vec{AB}$ e) $\vec{QP} = -\frac{11}{42}\vec{AB}$.

16. Jos pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, niin vektorit \vec{AB} ja \vec{AC} ovat yhden-suuntaiset.

$$17. \vec{OP} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}.$$

$$18. AP:PB = 1 : 2 \text{ ja } CP:PD = 2:1.$$

$$19. AP:PE = 16:5 \text{ ja } FP:PD = 11:10.$$

$$20. k = \frac{20}{3}.$$

$$21. \text{ a) } \begin{cases} r = -3 \\ s = -1 \end{cases} \quad \text{ b) } \begin{cases} r = -1\frac{3}{5} \\ s = -1\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$22. t = -2.$$

$$23. \vec{AB} = -3\hat{i} + 4\hat{j}, \quad \left| \vec{AB} \right| = AB = 5 \text{ ja loppupiste on } (49, 102).$$

$$24. \hat{a} = \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j}}{5}.$$

$$25. A = (1, 2).$$

$$26. \vec{AB} = \vec{i} - 2\vec{j}.$$

$$27. P = (2\frac{1}{2}, 0).$$

$$28. B = (5, 9).$$

$$29. D = (1, 1), B = (5, 0) \text{ ja } C = (4, 2).$$

30. eivätkä ole

$$31. 2:3.$$

$$32. (\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ \text{ b) } (\vec{CA}, \vec{CB}) = 60^\circ \text{ c) } (\vec{AB}, \vec{BA}) = 180^\circ \text{ d) } (\vec{AB}, \vec{BC}) = 120^\circ.$$

$$33. \text{ a) } 6 \text{ b) } 0 \text{ c) } -6 \text{ d) } 0 \text{ e) } 2.$$

34. Pistetulo häviää, kohtisuoruus.

$$35. \left| 2\vec{a} + 4\vec{b} \right| = 2\sqrt{3}.$$

$$36. \text{ a) } (\vec{u}, \vec{v}) = 75.750^0 \quad \text{ b) } (\vec{u}, \vec{v}) = 104.250^0$$

$$37. \alpha = 111.80^0, \beta = 35.54^0 \text{ ja } \gamma = 32.66^0.$$

38. $t = 2$. Huomaa, että $t = 0$ ei käy ja perustele.

39. Mahdotonta

40. $\frac{14\hat{i} - 7\hat{j}}{5}$ ja $\frac{16\hat{i} + 32\hat{j}}{5}$.

41. $(\bar{a}_b = \frac{13}{10}\hat{i} - \frac{39}{10}\hat{j}$ ja $\bar{b}_a = \frac{52}{5}\hat{i} - \frac{39}{5}\hat{j}$).

42. $(4\frac{2}{5}, 2\frac{1}{5})$.

44. noin 75.7 astetta.

45. Yhden kulman asteluku on 36.34.

46. a) Vastainen sivu noin 11.5 cm, kulmat 31.5 ja 115.5 astetta

b) Vastainen sivu noin 25.5 cm, kulmat 23.2 ja 42.8 astetta.

Sinilauseetta ei voi käyttää, koska ...

47. a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{3}$.

48. $c = 241$ taikka $c = -19$.

49. $13\frac{1}{2}$ pinnan yksikköä.

50. a) $5\hat{i} + 8\hat{j} + 2\hat{k}$ b) $\sqrt{93}$ c) $\bar{x} = 6\hat{i} - 21\hat{j} - 21\hat{k}$

51. $\vec{AB} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$, $|\vec{AB}| = AB = \sqrt{76}$. Keskipiste on $(2, 1, 0)$.

52. 93.59^0 .

53. $(3\frac{2}{5}, 4, -3\frac{4}{5})$.

54. Eivätkä ole.

55. a) $\pm \frac{4\bar{i} + 3\bar{j}}{5}$, b) $\pm \frac{\bar{i} + k\bar{j}}{\sqrt{1+k^2}}$, c) $\pm \frac{3\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{10}}$

56. a) $x - 2y - 5 = 0$, b) $3x + 2y - 7 = 0$, c) $y = -1$, d) $x = 3$.

57. a) $\bar{r} = 8\frac{1}{2}\hat{i} + t(2\hat{i} + \hat{j})$ b) $\begin{cases} x = 8\frac{1}{2} + 2t \\ y = t \end{cases}$ (Muitakin esitysmuotoja on)

58. a) $\bar{s} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$, $k = -1\frac{1}{2}$ ja suuntakulma noin -56.3^0

b) Suuntakulma 90 astetta, kulmakerrointa ei ole.

c) Suuntakulma nolla, kulmakerroin nolla.

$$59. \quad a) \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad b) \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2-z}{2}$$

c) xy-tasolla $z = 0$, piste $(4, 4, 0)$

xz-tasolla $y = 0$, piste $(1, 0, 2)$

yz-tasolla $x = 0$, piste $(0, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

$$60. \quad a) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad b) \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

61. Taitaapa leikata x-akselin kohdassa $x = -3$.

62. a) Pyssystä teereen $\sqrt{350} \approx 18.7$ m

$$b) \vec{s} = 10\hat{i} - 15\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$c) \text{Kuulan ratasuora} \begin{cases} x = 20 + 10t \\ y = 30 - 15t \\ z = 5t \end{cases}$$

d) Luodin paikka noin $(576 \text{ m}, -804 \text{ m}, 278 \text{ m})$

63. 250 m.

64. Ovat, koska yhtälölle $\vec{AD} = t\vec{AB} + s\vec{AC}$ löytyy ratkaisu.

65. 88.6° .

66. $(2, -3, 1)$