8.1. Tuloperiaate

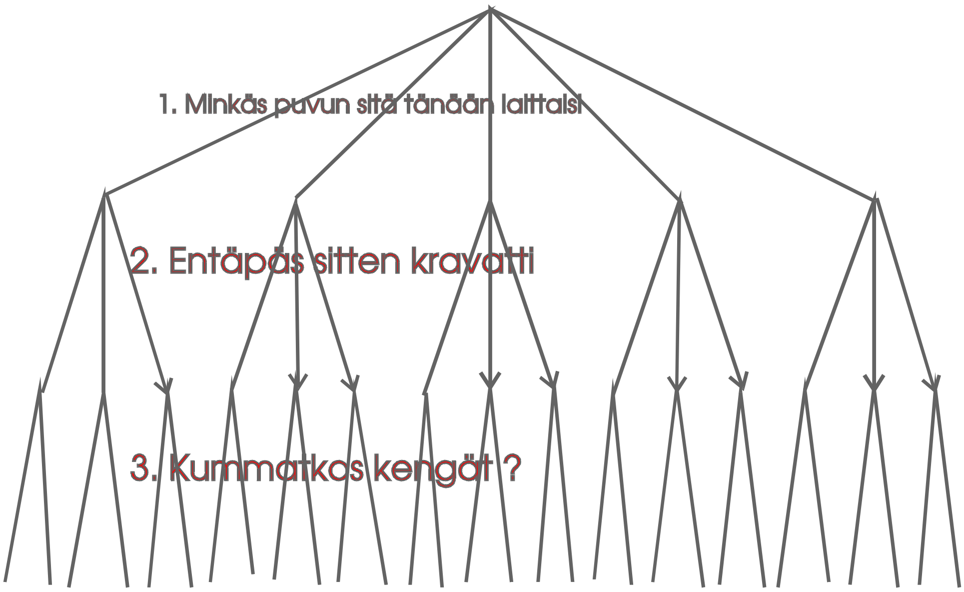
Katseltaessa klassisen todennäköisyyden määritelmää selviää välittömästi, että sen soveltamiseksi on kyettävä määräämään erilaisten joukkojen alkioiden lukumääriä. Jo todettiin, ettei ole suurta merkitystä laskeskella lottorivin ensimmäiseen numeroon liittyviä todennäköisyyksiä. Vasta sitten, kun pystytään veikattavasta lottorivistä sanomaan, millä todennäköisyydellä siinä on rahaa tuova määrä arvonnan suosimia numeroita, siis neljä, viisi, kuusi, kuusi ja lisänumero taikka seitsemän oikein, liikutaan kiinnostavan ongelman parissa. Tällöin täytyy mm. tietää, kuinka monta erilaista lottoriviä on olemassa ja kuinka monta niistä on sellaisia, joissa on vaikkapa viisi oikeaa numeroa.

Matematiikan sitä osaa, jossa käsitellään äärellisten joukkojen ja niiden osajoukkojen (alkioiden) lukumäärien määrittämistä, sanotaan **kombinaatio-opiksi,** jossa kaikkein keskeisin menetelmä on **tuloperiaate**. Tuloperiaatteen idea on syytä hallita hyvin, sillä sen avulla johdetaan muitakin joukko-opillisia menetelmiä.

Esim. 1 Antti on lähdössä ravintola Kaurantähkään soittamaan, haitaria vaiko kontrabassoa, lienee samantekevää. Kuinka monta erilaista mahdollisuutta hänellä on pukeutua tilaisuuteen, kun hänellä on viisi pukua, kolme kravattia ja kahdet kengät?

Jos oletetaan Antin valitsevan esiintymisasunsa ”vaiheittain” ja minkä tahansa kravatin sopivan minkä tahansa puvun ja kenkäparin kanssa, saattaisi erilaisia ”pukeutumisreittejä” havainnollistaa vaikkapa seuraavalla kuviolla:

Antti (miettien):



Kaaviota katselemalla voidaan huomata, että valinnanmahdollisuuksien määrä kasvaa kussakin vaiheessa niin moninkertaiseksi, kuin on valinnanmahdollisuuksia. Vaatetukseltaan erilaisia Antteja on siten niin monta kuin on valinnanmahdollisuuksien tulo, $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Käsitelty käytännönläheinen tapahtumakuvaus on esimerkki tuloperiaatteesta. Määritellään käsite täsmällisesti ja paina se mieleesi niin pitkäksi taipaleeksi elämäsi vartta, kuin todennäköisyyslaskennan kanssa tekemisiin joudut:

****

MÄÄRITELMÄ 4: Jos jokin prosessi voidaan suorittaa k:ssa eri vaiheessa siten, että

- 1. vaiheessa on n_1 valinnanmahdollisuutta,
- 2. vaiheessa on n_2 valinnanmahdollisuutta,

. . . .

- k:nnessa vaiheessa on n_k valinnanmahdollisuutta

RIIPPUMATTA SIITÄ, MINKÄ VAIHTOEHDON MUISSA VAIHEISSA VALITSEE,

niin koko prosessi voidaan viedä läpi

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_{k-1} \cdot n_k$ eri tavalla, ja tämä luku on eri vaiheissa olevien valinnanmahdollisuuksien tulo.

****

Esim. 2 Puhelinlaskuihin liittyvässä puhelurittelyssä puhelimesta soitettujen numeroiden neljä viimeistä numeroa on peitetty. Tiina on saanut haltuunsa miehensä matkapuhelimen puhelueritelyn ja toteaa, että lähes päivittäin mies on soittanut numeroon 09 – 875****. Lisäksi Tiina on saanut selville, että puhelimeen ei koskaan vastaa ihmisääni, vaan yhteyden syntyessä alkaa aina soida tunnussävel elokuvasta ”Sumujen silta”.

Kuinka kauan enintään kestäisi systemaattisesti kokeillen selvittää tuo salaperäinen numero, jos yhteen kokeiluun kuluu aikaa 45 sekuntia? Paljonko kokeilu pahimmillaan maksaisi tavallisesta matkapuhelimesta soitettuna, jos yhteen soittoon kuluisi keskimäärin 3 senttiä.

Tuloperiaatteen nojalla saadaan määritettävän puhelinnumeron

- viimeiseksi numeroksi 10 valinnanmahdollisuutta
- toiseksi viimeiseksi niin ikään 10,
- samoin kolmanneksi viimeiseksi kuin myös
- neljänneksi viimeiseksi 10 valinnanmahdollisuutta.

eli mahdollisia numeroita kaikkiaan on $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ kpl, sillä jokaisen neljän tuntemattoman numeron mahdollisuuksien **lukumäärä ei riipu** muista kolmesta tuntemattomasta numerosta.

Numeron 09–875txyz systemaattinen kokeilu tapahtuu esimerkiksi siten, että valitaan t = x = y = 0 ja juoksutetaan z läpi nollasta yhdeksikköön. Ellei tärppää, niin asetetaan t = x = 0, y = 1 ja juoksutetaan z läpi nollasta yhdeksikköön jne. Jos vasta viimeinen kokeiltava numeroyhdistelmä 09-8759999 on oikea, niin tässä pahimmassa tapauksessa aikaa on kulunut kaikkiaan $45 \cdot 10^4 \,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{h}$ eli runsas 5 vuorokautta. Hintaa kokeilulle kertyisi tällöin 30 000 senttiä eli 300 euroa.

Esim. 3 Pöydällä on selkäpuoli ylöspäin viisi samanlaista korttia, joista kolmessa on S-kirjain ja kahdessa I. Kortit käännetään yksitellen oikein päin ja asetellaan vierekkäin. Millä todennäköisyydellä syntyy sana SISSI?

Tehtävä voidaan ratkaista myöhemmin esitettävän todennäköisyyslaskennan kertolaskusäännön avulla, mutta menee myös tuloperiaatteen ja klassisen todennäköisyyden määritelmän nojalla.

Kun ryhdytään soveltamaan klassisen todennäköisyyden määritelmää, ´´$\dfrac{\text{suotuisat}}{\text{kaikki}}$´´, täytyy pystyä selvittämään, kuinka monella eri tavalla nämä viisi korttia kaiken kaikkiaan voidaan asettaa järjestykseen, ja toisekseen se, kuinka monella eri tavalla näistä voidaan muodostaa sana SISSI. Kun lopuksi muodostetaan näin saatujen kahden luvun suhde, niin haluttu todennäköisyys on selvillä.

Perusjoukko E:
1. kortti voidaan valita 5 eri tavalla
2. kortti voidaan valita 4 eri tavalla
3. kortti voidaan valita 3 eri tavalla
4. kortti voidaan valita 2 eri tavalla
5. kortti enää yhdellä tavalla,

eikä tässä prosessissa valinnanmahdollisuuksien <u>lukumäärään</u> missään vaiheessa vaikuta mitään se, minkä korteista on edellisissä vaiheissa valinnut.

Perusjoukossa E = {erilaisten korttijonojen joukko} on tuloperiaatteen nojalla alkioita {erilaisia viiden kortin järjestettyjä jonoja} yhteensä $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Tapahtuma A = {kortit järjestyvät niin, että muodostuu sana SISSI} :
1. kortti valittava niin, että tulee S-kirjain; 3 mahdollisuutta
2. kortti valittava niin, että tulee I-kirjain; 2 mahdollisuutta
3. kortti valittava niin, että tulee S-kirjain; 2 mahdollisuutta
4. kortti valittava niin, että tulee S-kirjain; 1 mahdollisuus
5. kortin valintaan on enää yksi mahdollisuus.

Niinpä tapahtumaan A, joka on suotuisa, on olemassa kaiken kaikkiaan $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ erilaista reittiä, joten

$$P\,(\text{SISSI}) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

Esim. 4 Tavallisesta 52 kortin pakasta otetaan umpimähkään peräkkäin viisi korttia a) panematta jo otettuja kortteja takaisin b) pannen joka kerta nostettu kortti pakkaan ja sekoittamalla se huolella. Millä todennäköisyydellä kaikki kortit ovat ruutua?

Tapaus a)

Perusjoukko E:
1. kortti, 52 valinnanmahdollisuutta
2. kortti, 51 valinnanmahdollisuutta
3. kortti, 50 valinnanmahdollisuutta
4. kortti, 49 valinnanmahdollisuutta
5. kortti, 48 valinnanmahdollisuutta

Tuloperiaatteen nojalla kaikki 5 korttia voidaan valita tietyssä järjestyksessä $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$ eri tavalla.

Tapahtuma A = {kaikki 5 korttia ovat ruutua} :
1. kortti, oltava ruutua, 13 valinnanmahdollisuutta
2. kortti, oltava ruutua, 12 valinnanmahdollisuutta
3. kortti, oltava ruutua, 11 valinnanmahdollisuutta
4. kortti, oltava ruutua, 10 valinnanmahdollisuutta
5. kortti, oltava ruutua, 9 valinnanmahdollisuutta.

$$P(5 \text{ ruutua}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 4} = \frac{33}{66640}.$$

Tapaus b)

Mikäli poistettu kortti pannaan aina takaisin pakkaan, perusjoukkoa määritettäessä on jokaisen kortin nostossa aina 52 valinnanmahdollisuutta ja ruutuja, suotuisia poimittaessa näitä on joka kerta 13.

$$P(5 \text{ ruutua}) = \frac{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52} = \frac{13^5}{52^5} = \left(\frac{13}{52}\right)^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

Esim. 5 Tavallisesta 52 kortin pakasta otetaan umpimähkään 5 korttia panematta jo otettuja kortteja takaisin. Millä todennäköisyydellä saadaan ensin jokin ässä ja sen jälkeen neljä ruutua?

Tämä tehtävä on valittu tähän yhteyteen yksinomaan siitä syystä, että tuloperiaatteen yhteydessä kovin korostettu valinnanmahdollisuuksien riippumattomuus prosessin eri vaiheissa tulisi sisäistetyksi.

Tehtävää ei kyetä tähänastisilla tiedoilla ratkaisemaan! Vaikka perusjoukko E on sama kuin edellisessäkin esimerkissä, tapahtuman A = {ensin jokin ässä, sitten neljä ruutua} eri versioiden lukumäärän määrittämiseen ei pelkkä tuloperiaate riitä. Kun on ensimmäinen kortti nostettu, siihen on ollut neljä mahdollisuutta, mutta toisen kortin kun pitää olla ruutua, on valinnanmahdollisuuksia 12 tai 13 sen mukaan, onko ensimmäinen kortti ollut ruutuässä vai ässä jostakin muusta maasta. Toisen kortin nostossa valinnanmahdollisuuksien lukumäärä **ei nyt ole riippumaton** siitä, minkä ässän ensimmäisessä otossa nosti.