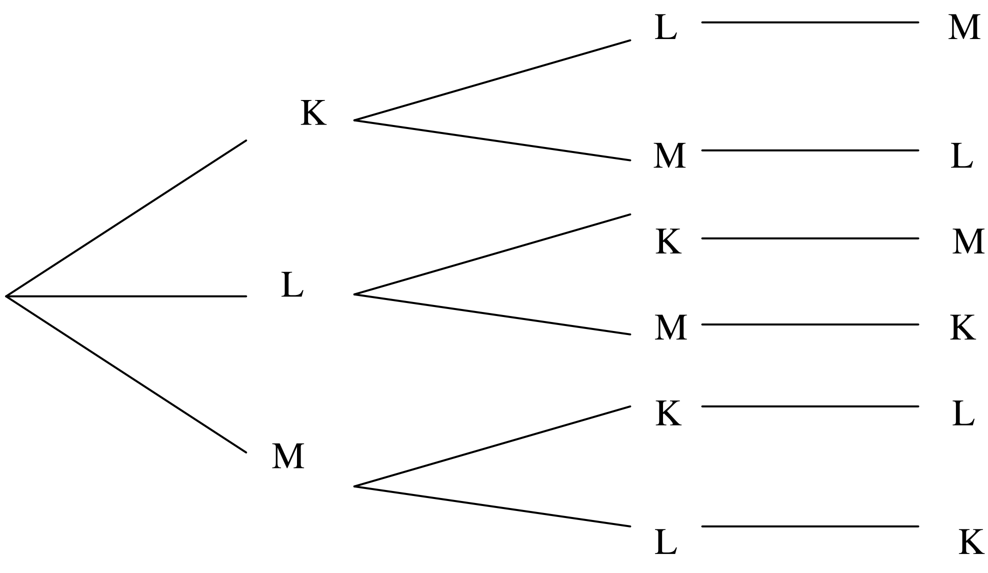
8.2. Permutaatiot

Esim. 1 Kirjaimet K, L ja M asetetaan jonoon. Kuinka monta erilaista järjes-tettyä jonoa näin saadaan?

Voidaan kuvitella vaikka niin, että hyllyllä on vierekkäin kolme laatikkoa (tai raiteilla kolme tavaravaunua) ja asetetaan ensimmäinen kirjain ensimmäiseen laatikkoon (vaunuun), toinen toiseen ja kolmas, jäljellejäänyt, viimeiseen. Kun aletaan valita ensimmäistä kirjainta ensimmäiseen laatikkoon, on kolme mahdollisuutta. Kun valinta on sitten suoritettu ja ryhdytään valitsemaan toista kirjainta toiseen laatikkoon, jäljellä on kaksi valinnanmahdollisuutta täysin riippumatta siitä, mikä kirjain ensimmäisessä vaiheessa valittiin. Kolmanteen laatikkoon on sitten valittava viimeinen, jäljellejäänyt.

Tuloperiaatteen nojalla valinnanmahdollisuuksia on $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kpl.



Esimerkin johdattelemana asetetaan

****

MÄÄRITELMÄ 5. Joukon alkioiden **permutointi** tarkoittaa operaatiota. missä joukon alkiot asetetaan järjestykseen, peräkkäin jonoon. Jokainen yksittäinen näin saatu, muista eroava jono on eräs **permutaatio.**

****

Ennen permutaatioitten lukumäärän määrittämistä sovitaan eräs tärkeä merkintätapa. Ykkösestä alkavien ja n:ään päättyvien kokonaislukujen tuloa kutsutaan n – kertomaksi ja sitä merkitään n!. Esimerkiksi

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120 \quad \text{ja } 1! = 1.$$

Tässä vaiheessa on tehtävä myös juuri esitetyn kanssa hieman ehkä ristiriitaisen tuntuinen sopimus, jonka mukaan 0! = 1. Tätä sopimusta kuitenkin tarvitaan välittömästä seuraavassa kombinaatio-opissa. Myöhemmissä ehkä vastaantulevissa matematiikan opinnoissasi saat selville syyn, miksi nollan kertoma on ykkönen.

Permutaatioiden lukumäärän antaa

****

LAUSE 2 Jos joukossa on n alkiota, niin näistä voidaan muodostaa n! erilaista järjestettyä jonoa eli permutaatiota.

Tod.: Sovelletaan tuloperiaatetta kuvittelemalla, että raiteella on n kpl tavaravaunuja peräkkäin. Junan ensimmäiseen vaunuun voidaan valita mikä tahansa joukon n:stä alkiosta, siis n valinnanmahdollisuutta.

Junan toiseen vaunuun valittavaksi alkioksi on n – 1 valinnanmahdollisuutta.

Kolmanteen vaunuun valittavaksi alkioksi on n – 2 mahdollisuutta.

. . . .

Toiseksi viimeiseen eli (n –1):een vaunuun on valinnanmahdollisuuksia kaksi ja

viimeiseen vaunuun enää yksi.

Koska valinnanmahdollisuudet prosessin eri vaiheissa ovat lukumääränsä suhteen riippumattomat muissa vaiheissa tehdyistä valinnoista, tuloperiaate antaa koko prosessissa valinnanmahdollisuuksien lukumääräksi

$$n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ \dots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

****

Sovellutuksissa elikkä käytännön probleemoissa ei useinkaan ole kyse siitä, että joukon kaikki alkiot asetettaisiin järjestettyyn jonoon, vaan tarvitaan tietoa siitä, kuinka monella tavalla n – alkioisesta joukosta voidaan valita k – alkiota käsittävä **järjestetty** osajoukko, jota sanotaan **k:ttain otetuksi permutaatioksi.** Pyritään määräämään tällaisten lukumäärä.

Huomaa nyt ensiksikin tarkoin, että joukon

KE = {kissa, koira, kana}

kaksittain otetut permutaatiot {kissa, koira} ja {koira, kissa} ovat **eri** permutaatioita huolimatta siitä, että niissä on samat alkiot, koska alkioiden keskinäinen järjestys vaihtuu. Toisekseen huomaa sekin, että mainitut kaksi permutaatiota eivät ole kaikki joukon KE 2 – permutaatiot.

Esim. 2 Kuinka monta 3 – permutaatiota on sellaisella joukolla, jossa on viisi alkiota?

Kysymyksellä tarkoitetaan siis sitä, kuinka monta kolmen alkion järjestettyä osajoukkoa voidaan valita 5 alkiota käsittävästä joukosta.

Tällaisen 3 – alkioisen järjestetyn joukon, järjestetyn jonon

- ensimmäinen alkion valintaan on 5 mahdollisuutta
- toisen alkion valintaan on 4 mahdollisuutta ja
- kolmannen alkion valintaan on 3 mahdollisuutta

jälleen täysin riippumatta siitä, minkä vaihtoehdon muissa vaiheissa valitsee. Tuloperiaatteen nojalla valinnanmahdollisuuksia on kaikkiaan

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ kpl},$$

missä luku 60 on aika tavalla toissijainen verrattuna sitä edeltävän lausekkeen merkitykseen. Tarkasteltavassa joukossa on 5 alkiota ja siitä on otettu kolmen alkion osajoukko. Joukon alkioiden lukumäärän kertoma esiintyy permutaatioiden lukumäärän antavan murtolausekkeen yläkerrassa. Viitosen ja osajoukon alkioiden lukumäärän erotuksen kertoma puolestaan esiintyy alakerrassa.

****

LAUSE 3 n – alkoisen joukon k – permutaatioiden määrä on $\frac{n!}{(n-k)!}$, $(k \leq n)$.

Tod.: Lause suomeksi sanottuna väittää siis, että n – alkioisesta joukosta voidaan valita k alkiota käsittävä järjestetty osajoukko $\frac{n!}{(n-k)!}$ eri tavalla.

- Ensimmäisen alkion valintaan on n mahdollisuutta
- toisen alkion valintaan on (n – 1) mahdollisuutta
- kolmannen alkion valintaan on (n – 2) mahdollisuutta
- neljännen alkion valintaan on (n – 3) mahdollisuutta

  . . . .

- k:nnen alkion valintaan on (n – (k – 1)) = (n – k + 1) mahdollisuutta,

ja eri vaiheiden valinnanmahdollisuuksien riippumattomuuden tähden koko jonon muodostamistapoja tuloperiaatteen nojalla on kaikkiaan

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ kappaletta, ja kun saatu lauseke vielä lavennetaan (n – k)!:lla (vrt. esim. 6.21), niin saadaankin jo väitetty tulos.

****

Esim. 3 Alpo on saanut kuljetusliikkeestä kesätyöpaikan. Hänen ensimmäi-senä työnään on hakea rengasvarastosta kaksi jo vanteella valmiina olevaa rengasta, jotka hänen pitäisi vaihtaa kuluneiden eturenkaiden tilalle Ranskaan lähtevään kuorma-autoon. Varastossa on 6 kpl 12.25” sisärenkaattomia ja 6 kpl 11” sisärenkaallisia pyöriä hyvässä epäjärjestyksessä. Alpo ei vielä tietenkään tiedä, että etuakselille asennetaan aina 12.25” Tubelesstyyppiset renkaat. Millä todennäköisyydellä hänen varastosta auton luokse pyörittelemänsä renkaat olivat oikeantyyppiset?

Tässä on nyt syytä käyttää permutaatioita, vaikka jokin muu menetelmä saattaisi olla helpompi. Alpo valitsee kaksi rengasta 12 renkaan joukosta, joten perusjoukon E alkiot ovat 12 − alkioisen joukon 2 − permutaatioita, joita on olemassa $\frac{12!}{(12-2)!}$ kpl.

Suotuisia valintoja ovat ne, joissa renkaat ovat molemmat kelvolliset elikkä valitut sisärenkaattomien 12.25” renkaiden joukosta. Näitä, siis 6 − alkioisen joukon 2 − permutaatioita on kaikkiaan $\frac{6!}{(6-2)!}$, joten

$$P(\text{molemmat renkaat oikeaa tyyppiä}) = \frac{\frac{6!}{4!}}{\frac{12!}{10!}} = \frac{\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!}}{\frac{10!\cdot 11\cdot 12}{10!}} = \frac{30}{132} = \frac{5}{22}.$$