9 Yhteenlaskusääntö ja komplementtitapahtuma

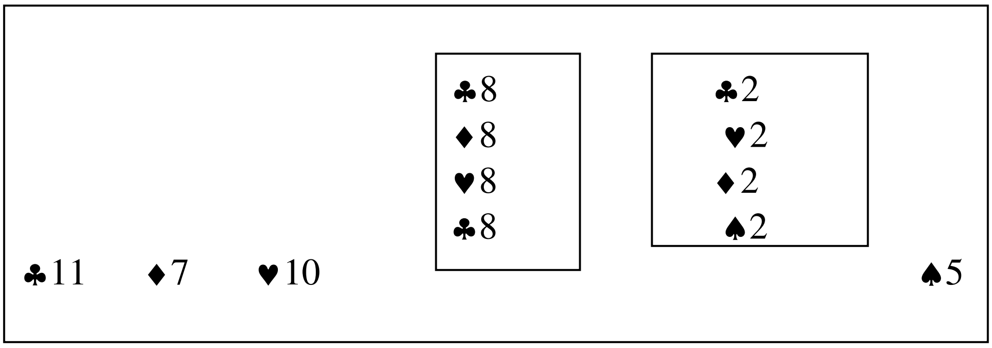
Kahta joukkoa sanotaan erillisiksi, jos niillä ei ole yhtään yhteistä alkiota. Jos pysytellään edelleen korttipakassa, niin voidaan ilman muuta sanoa, että patojen joukko ja ristien joukko ovat erillisiä, sillä pakassa ei ole ainoatakaan korttia, joka kuuluisi molempiin joukkoihin. Niin ikään jos vertaillaan keskenään ässien joukkoa ja kakkosten joukkoa, myös nämä ovat erilliset.

Entäpä jos merkitään A = {korttipakan ässät} ja B = {korttipakan ruudut}, niin nyt A ja B eivät ole erilliset, sillä ruutuässä kuuluu kumpaankin joukkoon. Joukkojen erillisyys taikka ei-erillisyys ovat varsin tähdellisiä käsitteitä, kun sovelletaan todennäköisyyslaskennan yhteenlaskusääntöä.

Esim. 1 Tavallisesta 52 kortin pakasta vedetään umpimähkään 1 kortti. Millä todennäköisyydellä se on a) kakkonen tai kahdeksikko b) pata tai kahdeksikko.

a) Olkoot A pakan kakkosten ja B kahdeksikkojen joukko. Kummassakin joukossa on neljä alkiota. Yhden kortin nostossa on mahdollisuuksia kaikkiaan 52 ja suotuisia 4 + 4 = 8, joten

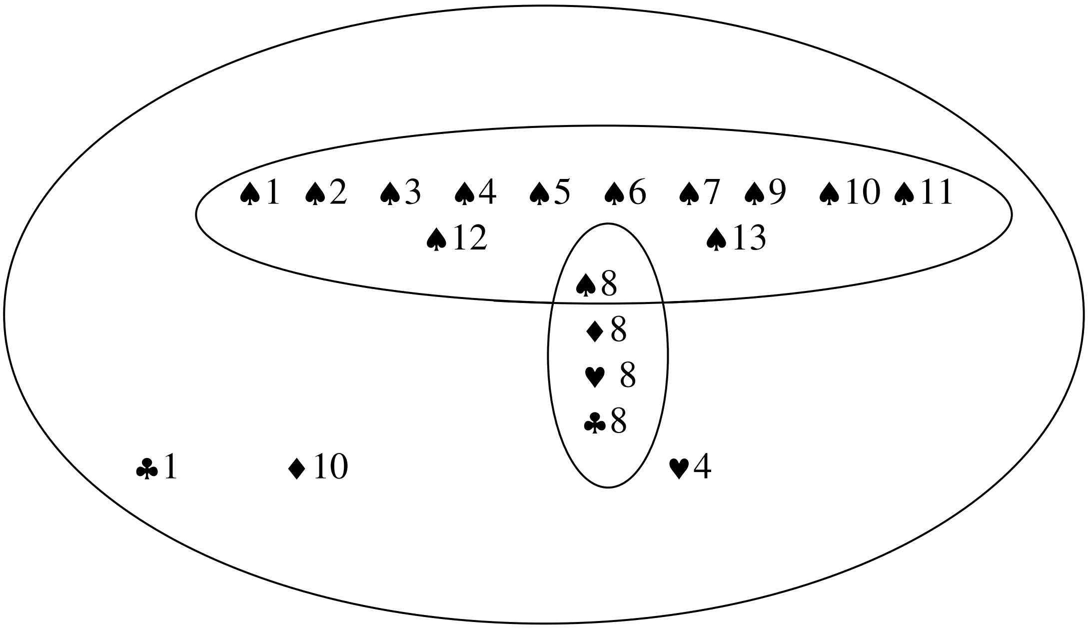
$$\text{P(kakkonen tai kahdeksikko)} = \frac{8}{52} = \frac{4+4}{52} = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \text{P}(2) + \text{P}(8)\,.$$



b) Olkoot a)-kohdan merkintöjen lisäksi C = patojen joukko. Suotuisan tapahtuman B tai C alkeistapauksia on 4 + 13 − 1 = 16 kpl, koska pata kahdeksikko on tullut lasketuksi kahteen kertaan. Joukot B ja C eivät siis ole erillisiä, koska niillä on yhteinen alkio (alkeistapaus).

$$\text{P((kahdeksikko tai pata)} = \frac{16}{52} = \frac{4+13-1}{52} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} =$$

= P(kahdeksikko) + P(pata) − P(pata kahdeksikko)



Esimerkin johdattelemana voidaan katoa jos ei nyt ihan todistetuksi, niin ainakin päätellyksi

****

LAUSE 5 Olkoot A ja B perusjoukon E tapahtumia. Tällöin

P(A tai B) = P(A) + P(B) − P(A ja B)

taikka joukko-opillisin merkinnöin

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Jos tapahtumilla A ja B ei ole yhtään yhteistä alkeistapausta, niin tapahtuma A ja B on mahdoton, jolloin voidaan kirjoittaa

SEURAUSLAUSE 5.1: Jos A ja B ovat perusjoukon E erillisiä tapauksia, niin

P(A tai B) = (P(A) + P(B).

****

Edellä symbolit $\vee$ ja $\wedge$ ovat kansainvälisesti hyväksyttyjä joukko-opillisia merkintöjä, ja niistä edellinen on suomeksi ”tai” ja jälkimmäinen ”ja”.

Otetaan käyttöön merkintä n(A) tarkoittamaan joukon A alkioiden lukumäärää taikka myös tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten määrää.

Esim. 2 Nelinumeroisen luvun numerot arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä luvussa esiintyvät numerot 6 ja 5 peräkkäin tässä järjestyksessä ainakin kerran ?

Perusjoukon muodostavat neljän kokonaisluvun jonot

$$E = \{xxxx \mid 1 \le x \le 6\}\ ;\ n(E) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$$
$$A = \{65xx\}\ ;\ n(A) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$$
$$B = \{x65x\}\ ;\ n(B) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$$
$$C = \{xx65\}\ ;\ n(C) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$$

Tapahtumat A ja B ovat erilliset, samoin B ja C, mutta tapahtumilla A ja C on yksi yhteinen alkeistapaus (6565), joka suotuisia alkeistapauksia yhteenlaskettaessa tulee otetuksi kahteen kertaan. Kysytty todennäköisyys voidaan laskea lauseen 6.5 nojalla soveltaen tulosta kolmeen suotuisaan tapausjoukkoon

$$P(A \text{ tai } B \text{ tai } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \text{ ja } C) =$$
$$= \frac{36}{1296} + \frac{36}{1296} + \frac{36}{1296} - \frac{1}{1296} = \frac{107}{1296} \approx 0.0826\,.$$

Esim. 3 Annella on 6 valkoista ja 12 kirjavaa kanaa. Iltamyöhällä hänen luokseen saapuu kaksi jengiin kuuluvaa kuriiria, joille on tarjottava ruokaa. Annen pakastin on aivan tyhjä eikä hänellä ole muuta mahdolli-suutta kuin mennä pimeään kanalaan, josta hän umpimähkään sieppaa kaksi kanaa, teurastaa ja panee kuumaan leivinuuniin paistumaan. Millä todennäköisyydellä

a) toinen kana on valkoinen ja toinen kirjava

b) ainakin toinen kana on valkoinen?

a) Osio on eräiden edellä käsiteltyjen kaltainen. Perusjoukkoa on kahden alkion valinta 18 alkion joukosta ja suotuisa on tapaus, jossa toinen kanoista on valkea ja toinen kirjava. Kun kyseessä on vain yhden kanan otto kumpaakin väriä, selvitään ilman kombinatoriikkaakin, vaikka ei sen käyttö ole kielletty.

$$\text{P(eriväriset kanat)} = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{18}{2}} = \frac{6\cdot 12}{9\cdot 17} = \frac{8}{17}.$$

b) Tässä tarvitaan yhteenlaskusääntöä, josta voi vihjata yleisestikin sen verran, että mikäli **tehtävässä esiintyy jokin sanoista ”ainakin”, ”tai” tai ”korkeintaan”, se on erittäin usein viite siitä, että yhteenlasku-sääntöä** taikka hetimiten esiin tulevaa yhteenlaskusääntöön kiinteästi liittyvää komplementtitapahtuman laskusääntöä pääsee soveltamaan.

Suotuisa on nyt tapaus ”ainakin toinen kanoista on valkea”, joka toteutuu paitsi silloin, kun täsmälleen toinen kanoista on valkea myös silloin, kun molemmat kanat ovat valkeat.

P(ainakin toinen valkoinen) =

$$= \text{P(kanat erivärisét)} + \text{P(molemmat valkoiset)} =$$

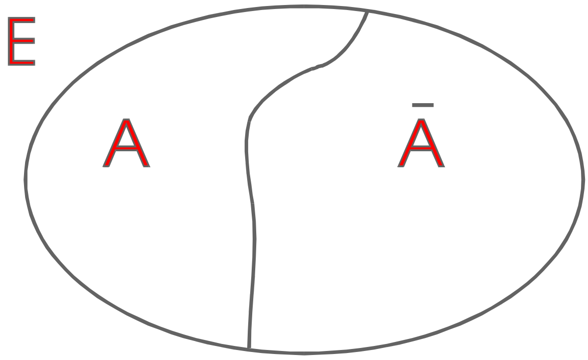
$$= \frac{8}{17} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{8}{17} + \frac{15}{9\cdot 17} = \frac{29}{51}$$

Tapahtuman A **komplementtitapahtumaa** merkitään $\overline{A}$. Kun merkitä A luetaan ”sattuu tapahtuma A”, niin $\overline{A}$ luetaan ”tapahtuma A ei satu”. Saattaa olla alkuun vaikeantuntuista hahmottaa, mitä tämä milloinkin tarkoittaa.

Pyritään pitämään mielessä, että puhuttaessa jostakin tapahtumasta liikutaan tietyssä perusjoukossa E. Jos tarkastellaan esimerkkinä nelilapsisen perheen lasten sukupuolia, niin E = {xxxx | x = P tai x = T}. Olkoot tapahtuma A = {perheessä on kolme poikaa}. Tällöin A:n komplementtitapahtuma $\overline{A}$ = {perheessä ei ole kolmea poikaa} = {perheen lapsista poikia on 0 tai 1 tai 2 tai 4}.

Jos taas yksittäisessä nopanheitossa tarkastellaan tapahtumaa A = {saadaan silmäluvuksi ainakin 5}, niin $\overline{A}$ = {silmäluvuksi saadaan korkeintaan 4}, eikä käytetä kömpelönpuoleista ilmaisua ”ei saada vähintään 5”.

Kun tarkastellaan mitä tahansa perusjoukkoa E ja tämän perusjoukon mitä tahansa tapahtumaa A, niin A ja sen komplementti $\overline{A}$ ovat **aina** erilliset. Tämän vuoksi tapahtuma ” sattuu A tai sattuu $\overline{A}$” on aina ns. varma tapaus, jonka todennäköisyys on 1. Alla oleva kuva yrittää selventää sitä, että A ja $\overline{A}$ yhdessä muodostavat koko perusjoukon E.



****

LAUSE 5 Olkoot A perusjoukon E jokin tapahtuma ja $\overline{A}$ sen komplementtitapahtuma. Tällöin

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 = P(E)$$

Tod.: Olkoot n(E) = n ja n(A) = k. Tällöin on $n(\overline{A}) = n - k$ ja

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = \frac{k+n-k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

****

Esim. 4 Sari on päättänyt hankkia seitsemän lasta. Millä todennäköisyydellä hän voi odottaa, että syntyvistä lapsista ainakin yksi on poika, kun kummankin mahdollisen sukupuolen todennäköisyys oletetaan yhtä suureksi.

Suotuisa tapahtuma koostuu useasta erillisestä tapahtumasta. Sarilla voi sitten aikanaan olla seuraavanlaisia seitsemän lapsen sarjoja; poikia on yksi, poikia on kaksi, poikia on kolme, ... , poikia on seitsemän. Näiden kaikkien todennäköisyydet tulisi laskea erikseen ja vielä osatodennäköisyydet yhteen. Käyttämällä komplementtitapahtuman todennäköisyyttä laskut yksinkertaistuvat valtavasti.

Tapahtuman A = {poikia on vähintään yksi} komplementtitapahtuma $\overline{A}$ = {poikia on vähemmän kuin yksi} = {kaikki lapset ovat tyttöjä} = = {ei yhtään poikaa} ja kun lauseen 6.5 mukaan

P(ainakin yksi poika) + P(ei yhtään poikaa) = 1, niin
P(ainakin yksi poika) = 1 – P(ei yhtään poikaa =

$$= 1 - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 1-(\tfrac{1}{2})^7 = 1-\frac{1}{128} = \frac{127}{128}.$$

Esim. 5 Koulussa järjestetään pienet arpajaiset. Arpoja myydään kaikkiaan 100, joista viidellä voittaa. Jaani ostaa neljä arpaa. Millä todennäköisyydellä hän saa ainakin yhden voiton?

P(ainakin yksi voitto) = 1 - P(ei ainuttakaan voittoa).
Komplementtitapahtuman alkeistapauksina voidaan pitää niitä neljän arvan joukkoja, jotka on poimittu 95 ei-voittavan arvan joukosta. Näiden lukumäärän voi laskea 95-alkioisen joukon 4–kombinaatioiden (tai 4 – permutaatioiden) avulla. Perusjoukon E alkeistapaukset ovat vastaavasti 100-alkioisen joukon 4–kombinaatioita (tai 4 – permutaatioita). Kombinaatioita käyttäen saadaan

$$\text{P(ainakin 1 voitto)} = 1 - \text{P(ei yhtään voittoa)} =$$

$$= 1-\frac{\binom{95}{4}}{\binom{100}{4}} = 1-\frac{\frac{95\cdot 94\cdot 93\cdot 92}{4\cdot 3\cdot 2}}{\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{4\cdot 3\cdot 2}} =$$

$$= 1-\frac{95\cdot 94\cdot 93\cdot 92}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97} = 0.18812.....$$