10 Kertolaskusääntö

Kahta tapahtumaa tai satunnaisilmiötä sanotaan **riippumattomiksi**, jos toisen tulos ei millään tavalla vaikuta toiseen.

Esim. 1 A = (Heitetään noppaa kerran) ja B = (vedetään yksi kortti pakasta). Nopanheiton tulos ei mitenkään vaikuta siihen, mikä kortti pakasta tulee eikä myöskään kääntäen. A ja B ovat toisistaan riippumattomia.

Esim. 2 Kaisalle syntyy viisi lasta. Yhdenkään yksittäin syntyvän lapsen sukupuoli ei vaikuta muiden lasten sukupuoleen. Kaikki seitsemän tapahtumaa **syntyvän lapsen sukupuoleen nähden** ovat toisistaan riippumattomat.

Esim. 3 Tavallisesta 52 kortin pakasta vedetään kortti ja sen jälkeen vielä toinen kortti panematta ensiksi vedettyä korttia pakkaan takaisin. Tässä tapauksessa ilmiöt eivät ole riippumattomat, sillä vedettäessä jälkimmäistä korttia pakka ei ole samanlainen kuin ensimmäisen kortin vedossa.

Esim. 4 Kanakopissa M on kaksi valkokuorista ja neljä ruskeakuorista munaa ja kanakopissa N kolme valkeaa ja viisi ruskeaa munaa. Otetaan umpimähkään yksi kananmuna kummastakin kopista. Millä todennäköisyydellä molemmat ovat ruskeita?

Alkeistapauksia ovat kananmunaparit, joita on tuloperiaatteen nojalla 48 kpl: otetaan kopista M yksi muna, 6 mahdollisuutta ja otetaan kopista N yksi muna, 8 mahdollisuutta ihan riippumatta siitä, minkä munan otti kopista M.

Suotuisan tapahtuman alkeistapauksia on vastaavasti $4 \cdot 5 = 20$ ja siten on P(ruskea, ruskea) = $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$. Tämä lasku osataan suorittaa aikaisemmin esitetyn teorian avulla eikä tämän tarvitse liittyä mitenkään ns. kertolaskusääntöön, mutta kelpaa asiaan johdattelevaksi esimerkiksi.

Jos A = (kopista M valittu kananmuna on ruskea) ja B = (kopista N valittu kananmuna on ruskea), niin kiinnittämättä toisen munan valinnassa mitään huomiota siihen, minkä värinen muna toisesta kopista nousee, on P(A) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ja $P(B) = \frac{5}{8}$ ja yhdistetylle tapahtumalle P(A ja B) = P(ru, ru) = $\frac{5}{12} = \frac{10}{24} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = P(A) \cdot P(B)$.

Tulos yleistettynä on todennäköisyyslaskennan **kertolaskusääntö**

****

LAUSE 6 Jos A ja B ovat toisistaan riippumattomia tapahtumia, niin todennäköisyys sille, että molemmat tapahtuvat

$$P(A \text{ ja } B) = P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B).$$

****

Itse kunkin kannattaa mietiskellä, onko koko kertolaskusääntö missä määrin tarpeellinen. Johdatteleva esimerkkihän oli pelkkää murtolukujen kertolaskusäännön muokkaamista. joka tapauksessa tulos on laajennettavissa useamman riippumattoman tapahtuman tapahtumasarjan käsittelyyn ja tulosta päästään soveltamaan vallan usein, kun **sama ilmiö toistuu useita kertoja** niin, että **joka kerta yksittäisen tapahtuman lopputulos on riippumaton** siitä, mitä tapahtuu muissa sarjan tapahtumissa.

Esim. 5 Lanttia heitetään neljä kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan joka kerta kruunu?

P(4 kruunua) = P(kruunu) · P(kruunu) · P(kruunu) · P(kruunu) =

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

Esim. 6 Jalkapalloilija tekee rangaistuspotkulla maalin 80% todennäköisyy-dellä. Kuinka monta kertaa hänen on suoritettava rangaistuspotku, jotta hän tekisi ainakin yhden maalin yli 99% todennäköisyydellä? (Kevät 1981)

Tarkasteltaessa yhtä rangaistuspotkua on P(tulee maali) = 0.8 ja P(rangaistuspotku ei onnistu) = 1 – 0.8 = 0.2.

Todennäköisyys sille, että n kpl peräkkäisiä rangaistuspotkuja epäonnistuu, on siten 0.2^n ja siten P(n:llä potkulla ainakin 1 maali) = = 1 – P(ei yhtään maalia) > 0.99. Näin ollen luvun n saa ratkaistuksi epäyhtälöstä

$$1-0.2^n>0.99$$
$$-0.2^n>0.99-1$$
$$-0.2^n>-0.01 \,\Big|\cdot(-1)<0$$
$$0.2^n<0.01$$

Tällaisen eksponenttiyhtälön tai –epäyhtälön ratkaisu ei tässä vaiheessa opintoja onnistu kuin kokeilemalla, ellei joku ole itsenäisesti ja salaa saattanut logaritmioppia päänsä talteen. Laskimista löytyy näppäimistöltä kaksikin kelvollista tässä yhteydessä hyödyllistä nappulaa merkinnöin log tai ln. Otetaan viimeksi kirjoitetusta epäyhtälöstä puolittain logaritmit muistaen, että potenssin logaritmi = eksponentti kertaa kantaluvun logaritmi:

$$\log(0.2^n)<\log(0.01)$$
$$n\cdot\log(0.2)<\log(0.01) \,\Big|: (\log 0.2<0!!!$$
$$n>\frac{\log(0.01)}{\log(0.2)}=2.861....$$

Kun rangaistuspotkuja on mahdollista suorittaa vain tasalukuinen määrä, pienin luonnollinen luku, joka täyttää ehdon n > 2.861... , on kolmonen.

Vastaus: Vähintään kolme kertaa

Kertolaskusääntöä voi joskus käyttää silloinkin, kun peräkkäiset ilmiöt eivät ole riippumattomia. Näissä tapauksissa puhutaan **ehdollisesta todennäköisyydestä**, joskin asian perusteellinen käsittely ainakin laskukaavojen tarkan esittelyn osalta sivuutetaan.

Yritetään kuitenkin parin esimerkin avulla katsoa, millaisiin tapauksiin kertolaskusääntö soveltuu ja milloin sen käyttö on ei-suotavaa/kiellettyä/helppoa. Tarkkanenäinen tutkija huomaa heti, että ollaan likeisissä yhteyksissä tuloperiaatteeseen ja murtolukujen kertosäännön takaperoiseen soveltamiseen, kuten jo edellä tuli todetuksi.

Esim. 7 Tavallisesta 52 kortin pakasta vedetään umpimähkään 5 korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki ovat samaa maata?

$$\text{P(1. kortti jotakin maata)} = \frac{52}{52} = \frac{4}{4} = 1,$$
P(2. kortti ensimmäisen kortin maata) = 12/51
P(3. kortti ensimmäisen kortin maata) = 11/50
P(4. kortti ensimmäisen kortin maata) = 10/49
P(5. kortti ensimmäisen kortin maata) = 9/48

$$\text{P(väri)} = 1 \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{11880}{5997600} = 0.00198......$$

Esim. 8 Ensimmäisiä reissujaan suorittava rekkakuski Sini joutuu lastausta varten peruuttamaan yhdistelmän leveästä (?) ovesta sisään joka aamu kello 6. Todennäköisyys sille, että hän onnistuu peruutuksessaan ottamatta kertaakaan välillä eteen, ts. suorittamatta mitään oikaisuliikkeitä, on 0.2. Millä todennäköisyydellä hän viisipäiväisenä viikkona onnistuu peruutuksessa täsmälleen kolme ja epäonnistuu kaksi kertaa.

Yksittäisenä aamuna P(kerralla sisään) = 0.2 ja P(epäonnistuu eli joutuu korjailemaan) = 0.8.

Tehtävässä kysyttyä todennäköisyyttä **ei voi** laskea tulona $0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8$, joka kylläkin antaa todennäköisyyden sille, että peruutus onnistuu maanantaina, tiistaina ja keskiviikkona, mutta epäonnistuu torstaina ja perjantaina. On siis olemassa useita sellaisia Sinin peruuttamista kuvaavia tulosjonoja, jotka täyttävät ehdon: kolme onnistumista ja kaksi epäonnistumista, ja kaikilla näillä jonoilla on sama todennäköisyys. Kuinka monta tällaista jonoa on, selviää useimmille viimeistään ns. binomitodennäköisyyden yhteydessä.

Esim. 9 Tehtävässä 36 laskettiin komplementtitapahtuman kautta, millä todennäköisyydellä ensi lauantaina arvottavassa lottorivissä esiintyy 39. Tällöin todettiin, että suoraan laskien tehtävä olisi hankala. Katsotaan, kuinka hankala.

$$P(39\text{ ensimmäisenä}) = \frac{1}{39}\cdot\frac{38}{38}\cdot\frac{37}{37}\cdot\frac{36}{36}\cdot\frac{35}{35}\cdot\frac{34}{34}\cdot\frac{33}{33} = \frac{1}{39}$$

$$P(39\text{ toisena}) = \frac{38}{39}\cdot\frac{1}{38}\cdot\frac{37}{37}\cdot\frac{36}{36}\cdot\frac{35}{35}\cdot\frac{34}{34}\cdot\frac{33}{33} = \frac{1}{39}$$

....

$$P(39\text{ viimeisenä}) = \frac{38}{39}\cdot\frac{37}{38}\cdot\frac{36}{37}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{34}{35}\cdot\frac{33}{34}\cdot\frac{1}{33} = \frac{1}{39}$$

P(arvotaan numero 39) = P(39 ensimmäisenä) + P(39 toisena) + ...
+ P(39 kuudentena) + P(39 seitsemäntenä) =

$$= 7\cdot\frac{1}{39} = \frac{7}{39} = 0.17948\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vertaa saman todennäköisyyden laskemista komplementin kautta:

P(39 esiintyy) = 1 – P(39 ei esiinny) =