# 11 Binomitodennäköisyys

Varsin tärkeä kertolaskusäännön sovellutus on **binomitodennäköisyys.** Sen teoriaa sovelletaan tapauksissa, joissa

- **sama ilmiö toistuu** useita kertoja ollen jokaisen toiston tulos **riippumaton** siitä, miten edellisillä kerroilla kävi

- ilmiölle on rajattu **vain kaksi tulosmahdollisuutta.**

Huomaa, että ylle kirjoitettiin: ”...ilmiölle on rajattu kaksi...” . Useimmilla ilmiöillä on useita tulosmahdollisuuksia. Nopanheitossa tällaisia rajauksia voisivat olla esimerkiksi A = {heiton silmäluku on parillinen} ja $\overline{A}$ = {heiton silmäluku on pariton} taikka B = {saadaan kuutonen} ja $\overline{B}$ = {silmäluku korkeintaan 5}.

Palataan nyt uudelleen esimerkkiin 6.39, jossa Sini aina aamuisin peruutti autoa leveästä ovesta sisään. Ydinkysymys on, **kuinka monta sellaista tulosjonoa on, joissa peruutus onnistuu kolmesti ja epäonnistuu kahdesti**.

Merkitään A = {peruutus onnistuu} ja $\overline{A}$ = {peruutus epäonnistuu} ja edelleen $p(A) = p = 0.2$ ja $P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0.8$.

Yksittäisellä viikolla tapahtuman $AAA\overline{A}\,\overline{A}$ todennäköisyys $P(AAA\overline{A}\,\overline{A}) =$
= P(onnistuu ma,ti,ke ja epäonnistuu to,pe) = $0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.00512$. Sama todennäköisyys olisi sellaisessakin viikossa, jossa peruutuksissa on sanomista maanantaina ja tiistaina, mutta menevät loppuviikon nappiin. Ylipäätään sellaisia tulosjonoja, joilla kaikilla on sama todennäköisyys, ja joissa viidesti toistuva peruutuskoe onnistuu kolmasti ja epäonnistuu kahdesti on yhtä monta kuin on tapoja valita viidestä aamusta kolme, jolloin onnistutaan ja lopuissa kahdessa toivotaan, ettei kukaan näe.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{A}$ | A | $\overline{A}$ | A | A |

Yllä on eräs mahdollinen tulosjono, joiden lukumäärä lauseen 6.4 nojalla $\binom{5}{3} = 10$.

Tällöin P(onnistuu 3 ja epäonnistuu 2) = $\binom{5}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.0512 \approx 0.05$

Yritetään yleistää suoritettu pohdinta. Suoritettakoon tietty koe n kertaa ja rajoitutaan yksittäisessä kokeessa tarkastelemaan vain sitä, sattuuko tapahtuma A vai sattuuko sen komplementti $\overline{A}$. Sellaisia tulosjonoja, joissa A sattuu täsmälleen k kertaa ($0 \le k \le n$) on tarkalleen yhtä monta kuin on valita n:n paikan joukosta k paikkaa eli $\binom{n}{k}$. Jos edelleen oletetaan, että yksittäisessä kokeessa P(A) = p ja $P(\overline{A}) = q = 1 - p$, niin todennäköisyys jokaiselle sellaiselle tulossarjalle, missä koe toistetaan n kertaa ja A esiintyy sarjassa k kertaa ja loput $n - k$ kertaa esiintyy $\overline{A}$, on $p^k q^{n-k}$.

Kaikki tällaiset tulosjonot ovat erillisiä, joten yhteenlaskusääntöäkin soveltaen voidaan kirjoittaa

*****************************************************************

**LAUSE 7** Jos toistetaan n kertaa koe, jossa tapahtumalle A on P(A) = p ja komplemettitapahtumalle $\overline{A}$ on $P(\overline{A}) = q = 1 - p$, niin todennäköisyys sille, että koesarjassa A sattuu täsmälleen k kertaa ja $\overline{A}$ sattuu täsmälleen $n - k$ kertaa, on

$$\boxed{P(k\text{ kertaa }A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

*****************************************************************

**Esim. 1** Pitkäaikaisen seurantatutkimuksen avulla on pantu merkille, että Konsta myöhästyy koulusta ensimmäiseltä oppitunniltaan toden-näköisyydellä 0.40. Millä todennäköisyydellä Konsta viisipäiväisenä kouluviikkona saapuu ajoissa täsmälleen kahtena aamuna?

On samantekevää, lasketaanko todennäköisyys sille, että Konsta saapuu ajoissa täsmälleen kahtena aamuna (TAPA1) vai sille, että myöhästyy kolmena (TAPA2). Ei sovi kuitenkaan mennä sekaisin p:ssä ja q:ssa ja eikä näiden eksponenteissa.

TAPA 1:

Ilmiö ”Konsta tulee kouluun” toistuu viisi kertaa, siis n = 5.
Yksittäinen aamu, tapahtuma A = {Konsta ajoissa}, P(A) = p = 0.60.
$\overline{A}$ = {Konsta myöhästyy}, P($\overline{A}$) = q = 0.40.

$$P(\text{kaksi kertaa A}) = \binom{5}{2} \cdot 0.60^2 \cdot 0.40^3 = 0.2304 \approx 0.23$$

TAPA 2:

B = {myöhästyy}, P(B) = 0.40
$\overline{B}$ = {tulee ajoissa}, P($\overline{B}$) = 0.60

$$P(\text{kolme kertaa B}) = \binom{5}{3} \cdot 0.40^3 \cdot 0.60^2 = 0.2304 \approx 0.23.$$

*****************************************************************

**SEURAUSLAUSE 7.1**

Jos on laskettava, millä todennäköisyydellä n kertaa toistuvassa kokeessa A sattuu ainakin k kertaa, niin tämä saadaan todennäköisyyksien P(k kertaa A), P(k+1 kertaa A), , ..... , P(n − 1 kertaa A) ja P(n kertaa A) summana, ts.

$$P(\text{A ainakin k kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \binom{n}{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot q^{n-k-1} + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \binom{n}{n} \cdot p^n$$

*****************************************************************

**Esim. 2** Kaisalla on kuusi kukkasipulia, joista jokaisen itämistodennäköisyys on 0.80. Kaisa istuttaa kaikki sipulit. Millä todennäköisyydellä hän saa iloita vähintään neljästä kukasta.

$$P(\text{itää ainakin } 4) = P(\text{itää 4 tai 5 tai 6}) = P(\text{itää } 4) + P(\text{itää } 5) + P(\text{itää } 6)$$
$$= \binom{6}{4} \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^2 + \binom{6}{5} \cdot 0.8^5 \cdot 0.2 \; + 0.8^6 =$$
$$= \; 0.24576 + 0.393216 + 0.262144 = 0.90112 \approx 0.90.$$

**Esim. 3** Musiikkikauppa ilmoittaa, että myynnissä olevista CD-levyistä 99% on virheettömiä. Juuso tutkii ja tonkii 21 levyä ja löytää niistä 2 virheellistä. Määritä tämän tapahtuman todennäköisyys. (Kevät 90)

Ilmiö: CD-levyn tutkiminen
A = {levy on virheetön), P(A) = p = 0.99
$\overline{A}$ = {levy viallinen}, $P(\overline{A}) = q = 0.01$
Ilmiö toistuu 21 kertaa ja k = virheettömien levyjen määrä = 19. Tällöin virheellisiä levyjä on 2 kpl.

$$P(\text{virheettömiä levyjä } 19) = \binom{21}{19} \cdot 0.99^{19} \cdot 0.01^2 = \; 0.01734.... \approx 0.017.$$