12.2. Geometrinen todennäköisyys

Harjoitustehtävässä 14 on alustavasti tutustuttu geometriseen todennäköisyyteen jonkinlaisten yleisvalmiuksien pohjalta puhumatta koko käsitteestä mitään. Vaikka onnenpyörässä puhuttiin jonkin sektorin keskuskulman olevan 30^0, niin tällaisen asian määrittäminen on pikemminkin likiarvolaskentaa kuin täsmällistä matemaattista tarkkuutta. Klassisen todennäköisyyden määritelmä 6.3 sisälsi ajatuksen siitä, että alkeistapauksia on äärellinen määrä, mutta ilmiön alkeistapauksia saattaa löytyä joissakin tapauksissa äärettömästi. Kun asetetaan muurahainen valkoiselle paperille piirretyn koordinaatiston origoon ja kysytään, millä todennäköisyydellä muurahainen lähtee etenemään vaikkapa koordinaatiston II neljännekseen, niin vastataan heti, että kysytty todennäköisyys on 0.25. Jos kysytään, kuinka monta mahdollista, vaikkapa suuntavektorilla annettavaa kulkusuuntaa muurahaisella on, saatetaan joutua hetkeksi miettimään, ennenekuin vähän epäröiden todetaan, että ainakin suuntavektori voidaan asettaa äärettömän moneen eri asentoon.

Ilmiöön, jossa yhtä mahdollisten alkeistapausten joukkoa voidaan hahmottaa jollain geometrisella kuviolla, voidaan liittää käsite geometrinen todennäköisyys:

****
MÄÄRITELMÄ 10. Tapahtuman A (geometrinen) todennäköisyys

$$P(A) = \frac{\text{suotuisten tapausten geometrinen mittaluku}}{\text{perusjoukon geometrinen mittaluku}}$$

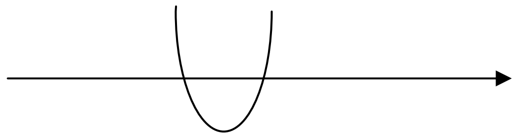
****
Esim. 1 Raivostunut opettaja lyö metrin pituisella karttakepillä pöytään niin että keppi katkeaa kahtia. Osat asetetaan suorakul-maisen kolmion kateeteiksi. Millä todennäköisyydellä hypotenuusan pituus on yli 80 cm? (K86, mukaillen)

Olkoon toinen osa x, jolloin toinen on 1 – x. Etsitään epäyhtälöä käyttäen x:lle kelvolliset arvot.

$$x^2 + (1-x)^2 > 0.8^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 - 0.8^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 0.36 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 0.18 > 0$$

RVY: $x^2 - x + 0.18 = 0 \iff x = \dfrac{1 \mp \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0.18}}{2} \iff$

$\iff x = \dfrac{5 \mp \sqrt{7}}{10} \iff x \approx 0.7645$ tai $x \approx 0.2355$.



Epäyhtälö $x^2 - x + 0.18 > 0$ kyselee, millä muuttujan x arvoilla ylöspäin aukeava paraabeli y = $x^2 - x + 0.18$ kulkee x – akselin yläpuolella. Vastaus siihen on $x < \dfrac{5 - \sqrt{7}}{10}$ tai $x > \dfrac{5 + \sqrt{7}}{10}$.

Pitäisi vielä etsiä esitetyn todennäköisyysongelman vastaus, ja huomata, etteivät läheskään kaikki epäyhtälön toteuttavat x:n arvot kelpaa itse kepin osasten pituuksia kuvaamaan.. Koko perusjoukon mittahan on kepin pituus. Siis x, dimensionaan metri, voi saada arvoja nollasta ykköseen, raja-tapauksina ovat tilanteet, jossa kepin päästä katkeaa vain pieni lastu tai opettajan käteen jää tuskin mitään. Vielä äärimmäisemmät rajatapaukset ovat ne, joissa keppi ei katkea ollenkaan. Suotuisia ovat x:n arvot $0 \le x < \dfrac{5 - \sqrt{7}}{10}$ tai $\dfrac{5 + \sqrt{7}}{10} < x \le 1$.

P(hypotenuusa yli 80 cm) = 1 – P(hypotenuusa korkeintaan 80 cm)

$$= 1 - \frac{\dfrac{5 + \sqrt{7}}{10} - \dfrac{5 - \sqrt{7}}{10}}{1} = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{10} = \frac{5 - \sqrt{7}}{5} \approx 0.47 .$$