13 Todennäköisyysjakauma ja siihen liittyvät käsitteet

Kun noppaa on heitetty, saattaa heittäjä innokkaana huudahtaa: ”Tuli kuutonen!” Heiton lopputulos ei kuitenkaan syvimmältään ole kuutonen, vaan se on säännöllisen heksaedrin eli kuution jokin asento heittoalustalla. Ratkaisevaa on, mikä kuution kuudesta sivutahkosta on alustaa syleilevälle sivutahkolle vastakkainen. Maalaamalla kuution jokaiseen sivutahkoon erilainen silmäluku nopan asennot voidaan erottaa toisistaan. Näin nopan heiton **tulokseen**, joka siis yksilöidään kuution ylöspäin olevaan sivutahkoon merkityn luvun avulla, **voidaan liittää reaaliluku**.

Lantinheitto on myös ns. satunnaisilmiö, jonka tulos on jompikumpi kolikon kahdesta mahdollisesta asennosta alustalla. Heittotulosta ei tavallisesti merkitä luvulla, vaan puhutaan kruunusta ja klaavasta. Kukapa estäisi sopimasta niinkin, että kruunu = 5 ja klaava = 6 tai tekemästä mitä muuta (yhtä merkityksetöntä) sopimusta tahansa. Väestökirjanpidon ATK-rekisterissä voisi merkitä iloista perhetapahtumaa lyhyesti: Syntyy poika = 1 ja syntyy tyttö = 0.

****

MÄÄRITELMÄ 11

Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ on funktio, joka liittää jokaiseen perusjoukon E alkeistapaukseen reaaliluvun.

****

Palautetaan mieliin, että funktio käsitteenä on sääntö tai laki, joka liittää jokaiseen määritysjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion. Esimerkiksi jokaisella Suomen kansalaisella on sosiaaliturvatunnus. Jokaisella on eikä kenelläkään ole kahta. Se että jokaisella henkilöllä tämä tunnus on erilainen kuin kaikilla muilla, on funktion käsitteen kannalta toisarvoista.

Esim. 1 Jos ilmiönä on viiden kortin nosto tavallisesta 52 kortin palasta, tähän voidaan liittää lukuisia satunnaismuuttujia. Yksi voisi olla $\underline{x}$ = korttien joukossa olevien ruutujen lukumäärä, toinen $\underline{y}$ = korttien joukossa olevien ässien lukumäärä jne. Tässä esimerkissä $\underline{x}$ voi saada minkä tahansa arvoista 0,1,2,3,4, tai 5 ja $\underline{y}$ puolestaan minkä tahansa arvoista 0,1,2,3 tai 4.

Ei kuitenkaan ole tapana erotella toisistaan reaaliluvulla kaikkia yhdistelmämahdollisuuksia. Ei esimerkiksi merkitä, että yhdistelmä {♦13, ♣10, ♣12, ♣11, ♥4} = 47946. Erilaiset viiden kortin yhdistelmät toki voisi numeroida. Mikä olisi tästä toimenpiteestä saatu hyöty?

Esim. 2 Mikäli tarkastellaan lottorivin arvontaa, tuloksena on eräs numero-sarja, johon liittyvät lainalaisuudet jokainen tuntee. Jokaista mahdollista lottoriviä voitaisiin tarkastella esimerkiksi siitä näkökulmasta, kuinka monta oikeaan lottoriviin kuuluvaa varsinaista numeroa siinä on. Tämä satunnaismuuttuja saisi aina jonkin arvoista 0,1,2,3,4,5,6 tai 7.

Sanotaan, että satunnaismuuttuja on **diskreetti**, jos se voi saada vain yksittäisiä (tavallisimmin kokonaisluku)arvoja. **Jatkuva** satunnaismuuttuja on sellainen, että se voi saada yleensä joltain rajoitetulta väliltä minkä arvon tahansa. Valitaan akkutehtaan linjalta yksi täyteen ladattu akku, ja seurataan, kuinka kauan se valaisee 110 W lappua, ennen kuin sen virranvoimakkuus laskee alle jonkin etukäteen määrätyn rajan. Tällöin akun kestoaika on jatkuva satunnaismuuttuja. Vastaavanlainen esimerkki voisi olla vaikkapa 2 kg vehnäjauhopussin tarkka punnitustulos.

Aluksi tarkastellaan diskreetin satunnaismuuttujan **todennäköisyysjakaumaa.** Myös tämä voidaan tulkita funktioksi:

****

MÄÄRITELMÄ 12

Satunnaismuuttujan x todennäköisyysjakauma on funktio, jossa jokaiseen satunnaismuuttujan $\underline{x}$ arvoon liitetään sen todennäköisyys.

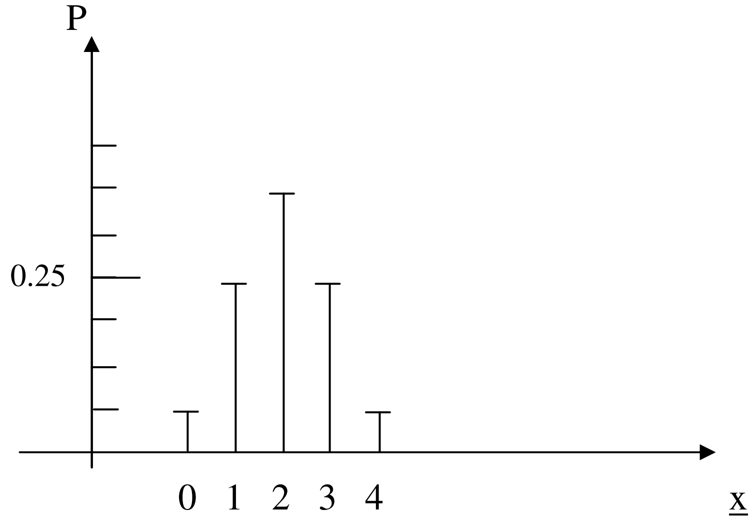
****

Esim. 3 Heitetään lanttia neljä kertaa ja satunnaismuuttuja $\underline{x}$ = heittosarjassa esiintyvien kruunujen lukumäärä, siis jokin joukon E = {0,1,2,3, 4} luvuista. Lasketaan jokaiselle mahdolliselle kruunujen määrälle sen todennäköisyys ja taulukoidaan tulokset. Laskut liittyvät binomitodennäköisyyteen ja ovat helposti suoritettavissa lauseen 6.7 perusteella. Jos merkitään kruunujen lukumäärää luvulla x, niin

$$P(\underline{x} = x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

Taulukoidaan tulokset ja esitetään graafisesti:

x	$P(\underline{x} = x)$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
1	$\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
2	$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
3	$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
4	$\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
	Todennäköisyyksien summa = $= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1$


P
0.25
0
1
2
3
4
x