13.2. Odotusarvo

**********************************************************************

**MÄÄRITELMÄ 6.13.** **ODOTUSARVO JA KESKIHAJONTA**

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ **odotusarvo** $E\underline{x}$ on luku, joka saadaan, kun jokainen satunnaismuuttujan arvo kerrotaan todennäköisyydellään ja kaikki näin saadut tulot lasketaan yhteen, ts.

$$E\underline{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ **keskihajonta** kuvaa todennäköisyysjakauman keskittymistä odotusarvon ympäristöön:

$$D\underline{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E\underline{x})^2}\ .$$

**********************************************************************

**Esim. 1** Janne ampuu pienoiskiväärillä ja vapaalla kädellä kohti maalia viisi luotia melko kaukaa. Todennäköisyys sille, että luoti osuu maaliin, on 0.6. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ilmoittaa maaliin osuvien luotien lukumäärän. a) Laadi $\underline{x}$:n todennäköisyysjakauma ja esitä se graafisesti.
b) Laske maaliin osuvien luotien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

Olkoon k tauluun osuvien luotien määrä, niin $P(\underline{x} = k) = \binom{5}{k} \cdot 0.6^k \cdot 0.4^{5-k}$

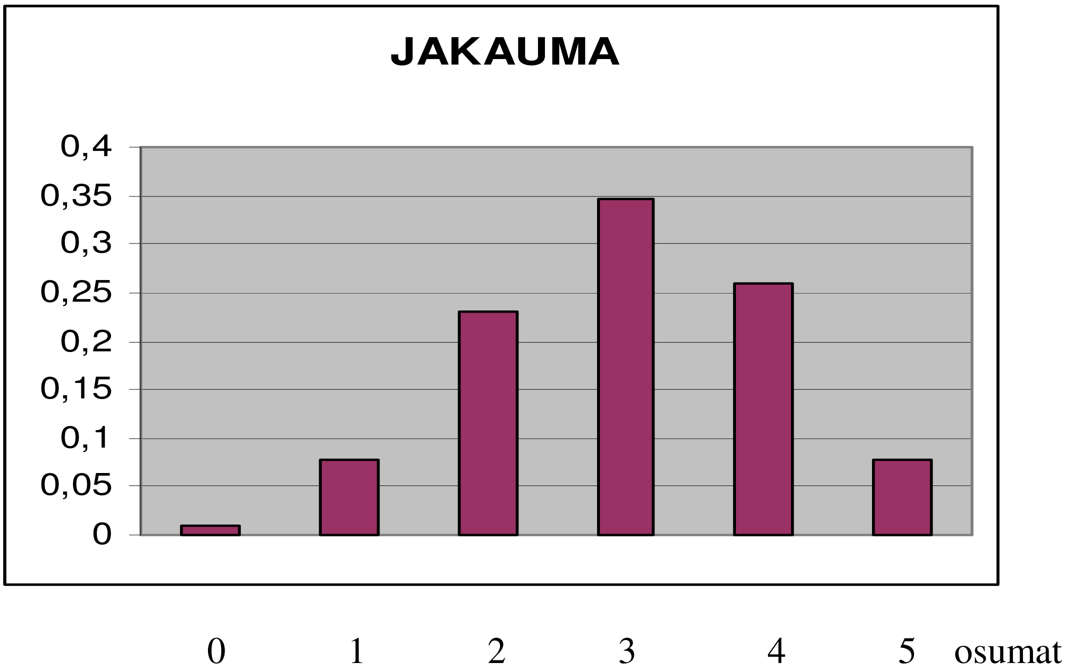
Taulukoidaan

| k | $P(\underline{x} = k)$ | likiarvoin |
|---|---|---|
| 0 | $\binom{5}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^5 = \frac{32}{3125} \approx$ | 0.01024 |
| 1 | $5 \cdot 0.6 \cdot 0.4^4 = \frac{48}{625} \approx$ | 0.0768 |
| 2 | $\binom{5}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = \frac{144}{625} \approx$ | 0.2304 |
| 3 | $\binom{5}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 = \frac{216}{625} \approx$ | 0.3456 |
| 4 | $5 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4 = \frac{162}{625} \approx$ | 0.2592 |
| 5 | $0.6^5 = \frac{243}{3125} \approx$ | 0.07776 |

$$E\underline{x} = 0 \cdot 0.01024 + 1 \cdot 0.0768 + 2 \cdot 0.2304 + 3 \cdot 0.3456 + \\ + 4 \cdot 0.2592 + 5 \cdot 0.07776 = 3$$

$$D^2\underline{x} = 0.01024 \cdot (0-3)^2 + 0.0768 \cdot (1-3)^2 + 0.2304 \cdot (2-3)^2 + \\ + 0.3456 \cdot (3-3)^2 + 0.2592 \cdot (4-3)^2 + 0.07776 \cdot (5-2)^2 = 1.2$$

$$D\underline{x} = \sqrt{1.2} = 1.0954...... \approx 1.1.$$




Kun todennäköisyysjakauma esitetään graafisesti jana- tai pylväsdiagrammina, odotusarvolla on varsin likeinen yhteys fysiikassa statiikan kurssilla käsiteltyyn massakeskipisteeseen, ja vaikkei olisi fysiikkaa opiskellutkaan, niin sen verran käytännön älyä on kaikilla, että käsittää mainion tavan ainakin likimääräisesti tarkistaa, onko odotusarvon lasku mennyt oikein. Jos kuvitellaan yllä oleva graafinen esitys sellaiseksi, että koordinaattiakselit olisivat massattomat ja vain diagrammin janat (tai kuvan kapeat pylväät) omaisivat massan, rakennelma pysyisi tasapainossa, kun se tuetaan odotusarvon kohdalta. Jos siis yllä oleva kuvio asetetaan veitsen terälle kolmosen kohdalta, rakennelma ei keikahda nenälleen eikä selälleen.

Satunnaismuuttujan keskihajonta on luku, joka kuvaa todennäköisyysmassan jakaantumista odotusarvon ympärille. Jos keskihajonta on hyvin lähellä nollaa, todennäköisyysmassa on keskittynyt lähelle odotusarvoa. Jos keskihajonta taasen on suuri, graafisessa esityksessä on pitkähköjä janoja (pylväitä) kauempana odotusarvosta.

Tavallisen tilaston avulla asia on helppo ymmärtää. Jos joku opettaja pystyisi laatimaan sellaisen kokeen, josta opetusryhmän jokainen oppilas saisi arvosanan seitsemän, kokeen keskiarvokin olisi seitsemän ja -hajonta nolla. Kaikki koearvosanat olisivat siis keskiarvon suuruisia. Tällainen koe ei erottelisi oppilaita lainkaan. Jos koe olisi sellainen, että tulisi runsaasi ala-arvoisia, mutta myöskin runsaasti kiitettäviä, keskihajonta olisi suuri (käytännössä yli kakkosen), mutta olisi täysin mahdollista, että keskiarvo olisi silti seitsemän. Tämä näkemys saattoi olla aiemminkin tässä kurssissa esillä.