13.4 Kertymäfunktio

Määritellään nyt, mitä tarkoitetaan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ **kertymäfunktiolla** F. Jos lähestytään asiaa yksinkertaisen esimerkin avulla, niin kertymäfunktion arvot vastaavat sellaisiin kysymyksiin, kuin millä todennäköisyydellä tavallisen nopan heiton tulos **ei ylitä arvoa** a) −3 b) 1.6 c) 4 d) 17.

Tilanteen a)-kohdassa kysytään, millä todennäköisyydellä nopanheiton silmäluku on pienempi tai enintään yhtäsuuri kuin −3. Tämä on selvästi mahdoton tapaus, ja sen todennäköisyys on nolla = F(−3). Jos katsotaan d)-kohdan kysymystä, niin tämä tarkoittaa vastaavasti, millä todennäköisyydellä nopanheiton tulos (silmäluku) on pienempi tai yhtäsuuri kuin 17. Tämä on ilmiselvästi varma tapaus, jonka todennäköisyys on yksi = F(17). Vielä c)-kohdan kysymystä jos tarkastellaan, niin osataan vastata, että nopanheiton silmäluku on pienempi tai enintään yhtä suuri kuin nelonen todennäköisyydellä 4/6 = 2/3 = F(4) = kertymäfunktion arvo pisteessä x = 4. Funktio F on selvästikin hyppäyksittäin muuttuva, eikä sen kuvaaja ole yhtenäinen, katkeamaton viiva. Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio ei siis ole jatkuva, mutta se on kuitenkin määritelty kaikilla x:n reaaliarvoilla.

****

MÄÄRITELMÄ 14

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio F arvolla x tarkoittaa todennäköisyyttä sille, että satunnaismuuttujan $\underline{x}$ arvo ei ylitä arvoa x ts.

$$F(x) = P(\underline{x} \leq x)$$

****

Esim. 1 Hirmunälkäinen Helena saapuu taas koulusta kotiin. Jääkaapissa on nyt 8 jogurttia, joista kolme on pilaantuneita. Eija syö kaksi jogurttia. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ilmoittaa, kuinka monta Eijan syömistä jogurteista on pilaantuneita. Määritä $\underline{x}$:n kertymäfunktio ja piirrä sen kuvaaja.
Esimerkin tapauksessa Helena voi syödä pilaantuneita jogurtteja kaksi, yhden tai ei yhtään. Missään tapauksessa hänen syömiensä pilaantuneitten jogurttien lukumäärä (= satunnaismuuttuja $\underline{x}$) ei ole negatiivinen eikä suurempi kuin kaksi. Lasketaan tarvittavat todennäköisyydet.

$$P(\underline{x}=0)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}$$

$$P(\underline{x}=1)=\frac{5\cdot 3}{28}=\frac{15}{28}$$

$$P(\underline{x}=2)=\frac{\binom{3}{2}}{28}=\frac{3}{28}$$

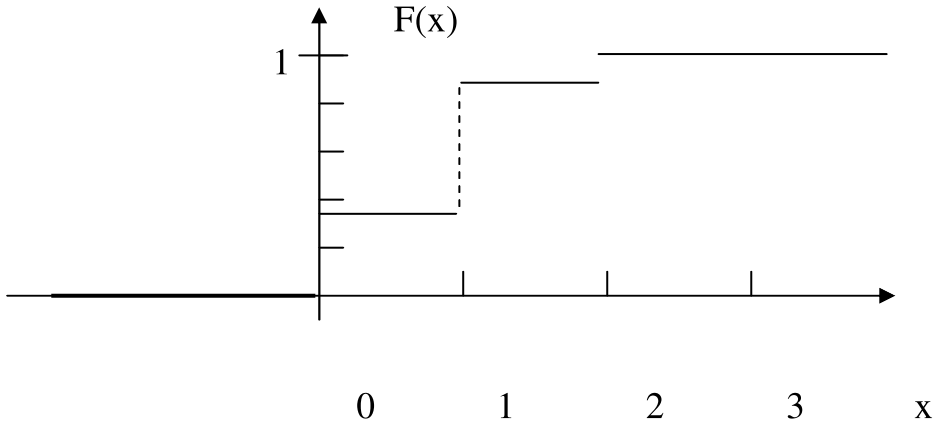
Syötyjen pilaantuneitten jogurttien määrä ei siis voi olla negatiivinen, joten kaikilla negatiivisilla x:n arvoilla $P(\underline{x} \leq x) = 0 = F(x)$.

Jos x on mikä tahansa luku väliltä $0 \leq x < 1$, niin $P(\underline{x} \leq x) =$
= P(syötyjä pilaantuneita jogurtteja on vähemmän kuin 1) = 10/28.

Jos x on mikä tahansa luku väliltä $1 \leq x < 2$, niin $P(\underline{x} \leq x) =$
= P(syötyjä pilaantuneita jogurtteja on vähemmän kuin 2) = 25/28.

Jos x on mikä tahansa luku, joka täyttää ehdon $x \geq 2$, niin $P(\underline{x} \leq x) =$
= P(syötyjen pilaantuneitten jogurttien lukumäärä ei ylitä arvoa 2) = 1.

$$\text{Siispä on } F(x)=\begin{cases} 0, \text{ kun} x<0 \\ \frac{10}{28}, \text{ kun } 0\leq x<1 \\ \frac{25}{28}, \text{ kun } 1\leq x<2 \\ 1, \text{ kun } x\geq 2 \end{cases}$$



Esim. 1 Kertymäfunktion kuvaaja