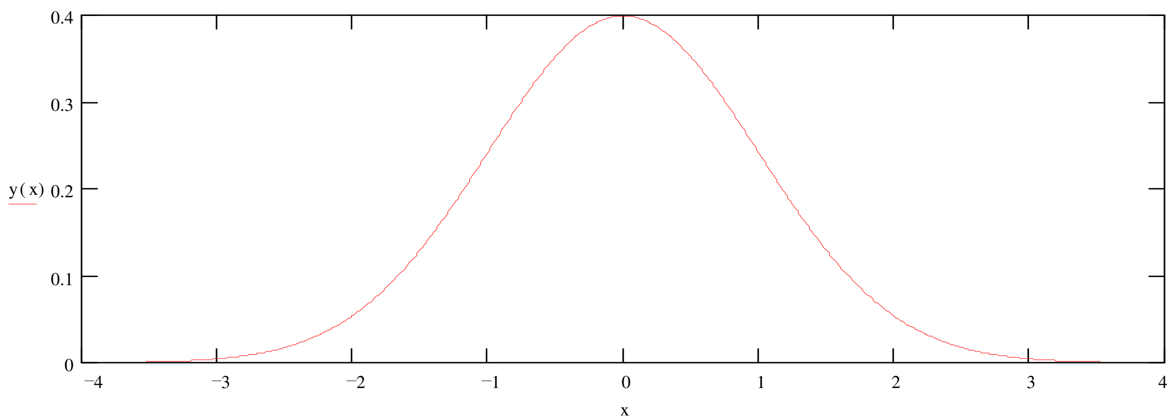
15.1 Normeerattu normaalijakauma

Jatkuvista jakaumista kaikkein tärkein on ns. normaalijakauma, jonka tiheysfunktio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

eikä näiden rivien kirjoittaja tiedä, miten juuri tällaiseen funktioon on päädytty. Kauan sitten käytössä olleessa Lehtosaari-Leinon lukion laajan matematiikan sangen hyvässä oppikirjassa mainitaan, että jakauman on ensimmäisenä johtanut ranskalainen Abraham de Moivre (1667-1754). Kerrotaan saksalaisen Gaussin käyttäneen jakaumaa satunnaisvirheen arvioinnissa merkittävän paljon, joka voi olla syy siihen, että tiheysfunktion kuvaajaa sanotaan **Gaussin käyräksi** tai muotonsa takia myös **kellokäyräksi**. Piirretään kuitenkin tiheysfunktion kuvaaja:



Kuva. Normaalijakauman tiheysfunktio

Ainakin kuvaajan perusteella näyttää ilmeiseltä, ettei funktio f saa missään negatiivisia arvoja ja edelleen voidaan osoittaa, että kuvaaja rajoittaa x-akselin kanssa pinnan, jonka ala on tasan yksi eli että $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$.

Normaalijakauman tiheysfunktio on kuitenkin määritelty kaikilla x:n reaaliarvoilla, mutta kuvaaja on niin lähellä x-akselia jo muuttujan niillä arvoilla, jotka toteuttavat ehdon $|x| > 3.5$, ettei kuvaaja x-akselista juuri enää erotu, kuten yltä näet. Kun normaalijakauman tiheysfunktio on täsmälleen edellä valittu, niin jakauman odotusarvo $E\underline{x} = 0$ ja keskihajonta $D\underline{x} = 1$. Tällöin sanotaan, että satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa **normeerattua normaalijakaumaa** N(0,1) eli on normaalijakautunut parametrein 0 ja 1.

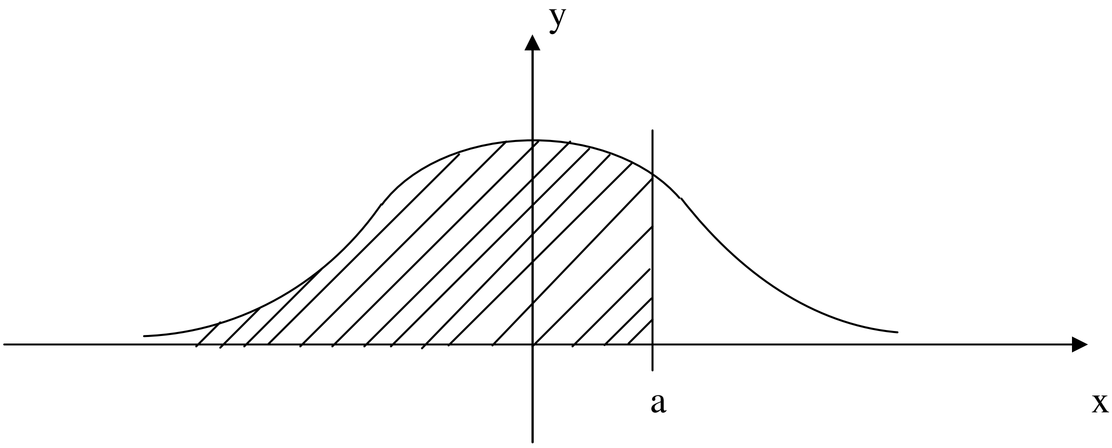
Kirjallisuudessa normaalijakauman tiheysfunktiota merkitään kirjaimella φ ja sen kertymäfunktiota kirjaimella Φ. Yleisesti siis integraalina

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ja} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

Tiheysfunktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen. Sanotaan, että x-akseli on sen **asymptootti**. Kuvaajan ja x-akselin väli on sitä pienempi, mitä suurempi $|x|$ on. Normaalijakauman kertymäfunktio pisteessä a antaa siis todennäköisyyden sille, että satunnaismuuttujan $\underline{x}$ arvo ei ylitä arvoa a elikkä

$$\Phi(x) = P(\underline{x} \le a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)dx$$

ja mainittua todennäköisyyttä esittää kuvassa viivoitetun alueen pinta-ala.



Kuva. $\Phi(a) = P(\underline{x} < a)$.

Koska kertymäfunktion arvoja ei siis voi tavallisin integrointikeinoin laskea, ne on taulukoitu. Jakauman symmetrisyyden tähden taulukkoon on otettu vain positiiviset arvot. Normaalijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä määritettäessä jokin matemaattisten aineitten taulukko on välttämätön.

Esim. 1 Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ on normaalijakautunut N(0,1). Määritä kertymäfunktion taulukon avulla

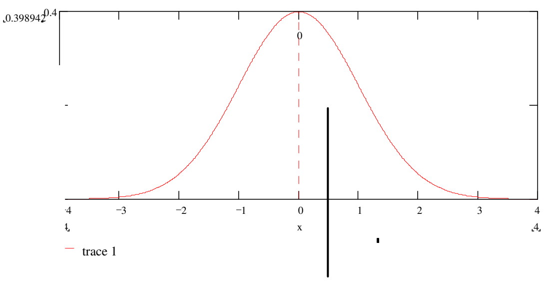
a) $P(\underline{x} \le 1.35)$
b) $P(\underline{x} > 0.446)$
c) $P(0.63 \le \underline{x} < 2.35)$
d) $P(\underline{x} \le -1.50)$.

a) $P(\underline{x} \le 1.35) = \Phi(1.35) = 0.9115$

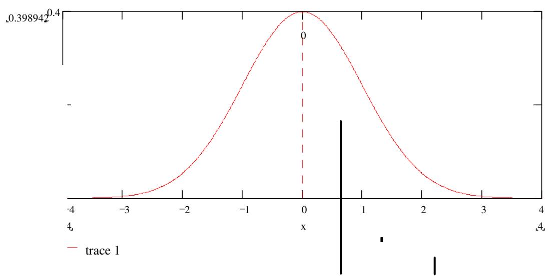
b) $P(\underline{x} > 0.446) = 1 - P(\underline{x} \le 0.446) = 1 - \Phi(0.446) \approx 1 - \Phi(0.45) =$
$= 1 - 0.6736 = 0.3264.$

c) $P(0.63 \le \underline{x} < 2.35) = \Phi(2.35) - \Phi(0.63) = 0.9906 - 0.7357 =$
$= 0.2549.$

d) $P(\underline{x} \le -1.50) = P(\underline{x} > 1.50) = 1 - \Phi(\underline{x} \le 1.50) = 1 - \Phi(1.50) =$
$= 1 - 0.9332 = 0.0668.$



Esim. 1. b)



Esim. 1. c)