

15.2 Yleinen normaalijakauma

Kun asevelvollisten kutsunnoissa toimitettavan lääkärintarkastuksen yhteydessä kutsuttavat mm. punnitaan, voidaan olettaa massajakauman histogrammin tiheällä luokitusjaolla muodoltaan noudattavan hyvinkin normaalijakauman tiheysfunktion kuvaajaa, mutta varmaa on, ettei tämän jakauman keskiarvo ole nolla eikä keskihajontakaan liene ykkönen.

Oletetaan, että jokin tutkittava ominaisuus on normaalijakautunut siten, että sen keskiarvo on μ ja keskihajonta δ , eli on normaalijakautunut $N(\mu, \delta)$. Tällöin voidaan osoittaa, että tutkittavan suureen ns. standardoidut arvot noudattavat normeerattua normaalijakaumaa $N(0,1)$. Jokainen alkuperäinen havaintoarvo x_i muuttuu standardiarvoksi z_i , kun sen ja keskiarvon erotus jaetaan jakauman keskihajonnalla:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\delta}$$

Esim. 1 Samin massa oli kutsunnoissa 72 kg. Sinä vuonna oli asevelvollisten kutsuttujen massan keskiarvo 75 kg ja hajonta 6 kg. Kaksi vuotta myöhemmin Samin veli Topi oli kutsunnoissa ja punnittiin: 76 kg. Sinä vuonna oli kutsuttavien massojen keskiarvo 80 kg ja hajonta 7 kg. Vertaa Samin ja Topin massojen standardiarvoja.

$$z_{\text{sami}} = \frac{72 - 75}{6} = -0.50$$

$$z_{\text{topi}} = \frac{76 - 80}{7} \approx -0.571$$

Topi oli suuremmasta massastaan huolimatta (ikäluokassaan) suhteellisesti Samia kevyempi. Koska kummankin massan standardiarvot olivat negatiivisia, molemmat olivat keskimääräisesti ikäluokkansa keskiarvoa kevyempiä (mikä on hyvä asia).

Yleiseen normaalijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä voidaan määrittää normeeratun normaalijakauman taulukon avulla, kunhan vain suoritetaan todennäköisyysalueen reunapisteiden standardointi.

Esim. 2 Millä todennäköisyydellä Samin kutsuntavuonna umpimähkään valitun alokkaan massa oli alle 80 kg?

$$P(m < 80) = P\left(z < \frac{80 - 75}{6}\right) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) \approx \Phi(0.83) = 0.7967.$$

Esim. 3 Millä välillä vaihtelivat Topin kutsuntavuonna niiden alokkaiden massat, jotka olivat keskiarvosta korkeintaan yhden hajonnan päässä. Mikä on todennäköisyys, että kolmesta umpimähkään valitusta alokkaasta ainakin kahden massa osui tälle vaihteluvälille?

Tässä esimerkissä, kun Topin kutsuntavuoden hajonta 7 kg on annettu, voidaan heti ilmoittaa vaihteluväliksi $73 \text{ kg} < m < 87 \text{ kg}$. Tämä vastaa normeeratun normaalijakauman väliä $-1 < z < 1$.

Yhden umpimähkään valitun alokkaan massa on tällä välillä todennäköisyydellä, joka saadaan vähentämällä toisistaan kertymäfunktion arvot $\Phi(1)$ ja $\Phi(-1)$. Tämä todennäköisyys on samalla tiheysfunktion kuvaaja, x-akselin sekä suorien $x = -1$ ja $x = 1$ väliin jäävän alueen ala.

$$\begin{aligned} P(73 \text{ kg} < m < 87 \text{ kg}) &= P(-1 < z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - 1 + \Phi(1) = \\ &= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

Valitaan kolme alokasta, $n = 3$. Olkoon $A =$ alokkaan massa on enintään yhden keskihajonnan päässä keskiarvosta, $P(A) = p = 0.6826$ ja $P(\bar{A}) = 0.3174 = q$. Olkoon k niiden alokkaiden lukumäärä, joiden massa sattuu ko. vaihteluvälille.

$$\begin{aligned} P(k \geq 2) &= P(k = 2) + P(k = 3) = \binom{3}{2} \cdot 0.6826^2 \cdot 0.3174 + 0.6826^3 = \\ &= 0.7617\dots \approx 0.76 \end{aligned}$$

Esim. 4 Erään valtion opetusministeriö on todennut, että eräille humanistisille koulutusaloille on valittu opiskelijoita liikaa. Opiskelijoiksi jo hyväksytyjen valintakokeiden pistemäärien keskiarvo on ollut 60 ja hajonta 13. Valintakoepistemäärien on todettu jakaantuneen likimain

normaalisti eli noudattavan yleistä normaalijakaumaa $N(60,13)$. Ministeriö määrää, että valitusta enintään 65 % saa aloittaa opinnot. Minkä kokonaisluvun valintapisteekseen saanut vielä pääsee opiskelemaan.

Hyväksytään enintään 65% on yhtä pitävää sen kanssa että opiskelupaikka evätään vähintään 35 prosentilta opiskelijoista.

$\Phi(-z) < 0.35 = 1 - \Phi(z) > 0.35 = \Phi(z) < 0.65 \Leftrightarrow z < (\approx) 0.39$. Tällöin

$$\begin{aligned} -z > -0.39 &= \frac{x - 60}{13} \Leftrightarrow x - 60 > -13 \cdot 0.39 \Leftrightarrow \\ x > 60 - 13 \cdot 0.39 &= 54.93 \end{aligned}$$

Jos hyväksymisrajaksi asetetaan 55 pistettä, opiskelun aloittavien lukumäärä jää alle 65 prosentin jo hyväksytyistä.