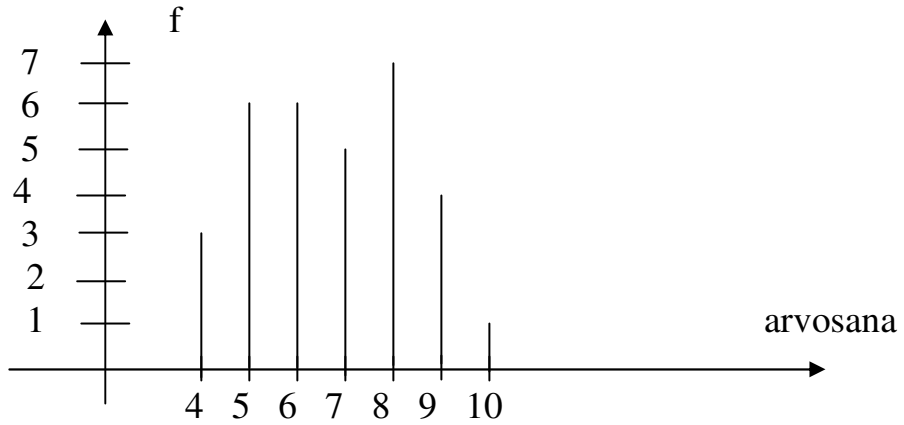
MAA6 - HARJOITUSTEN RATKAISUJA

TEHTÄVÄ 1

arvosana	frekvenssi	fx
4	3	12
5	6	30
6	6	36
7	5	35
8	7	56
9	4	36
10	1	10
summa	32	215

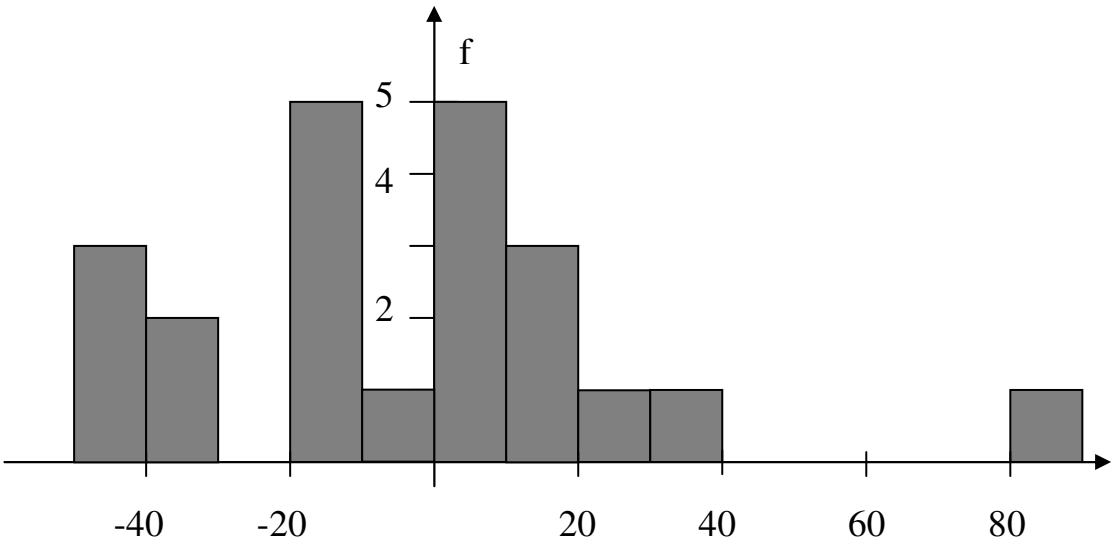
a) tyyppiarvo Mo = 8, koska sitä on eniten.
b) Kurssilla oli 32 oppilasta, joten Md on 16. ja 17. arvosanan keskiarvo. Niitä jotka saivat enintään arvosanan 6, on 3 + 6 + 6 = 15 ja kun seiskoja on viisi, niin nämä sanotut arvosanat kuuluvat tähän luokkaan, joten Md = 7.
c) Yllä olevan taulukon kolmas sarake on kohdassaan arvosanan ja sen saaneiden oppilaiden lukumäärän tulo.

$$\bar{x} = \frac{215}{32} = 6.7185 \approx 6.7$$



TEHTÄVÄ 2

luokka	$-50 \le x < -40$	$-40 \le x < -30$	$-30 \le x < -20$	$-20 \le x < -10$	$-10 \le x < -0$
frekv	3	2		5	1
luokka	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
frekv	5	3	1	1	
luokka	$50 \le x < 60$	$60 \le x < 70$	$70 \le x < 80$	$80 \le x < 90$	
frekv				1	



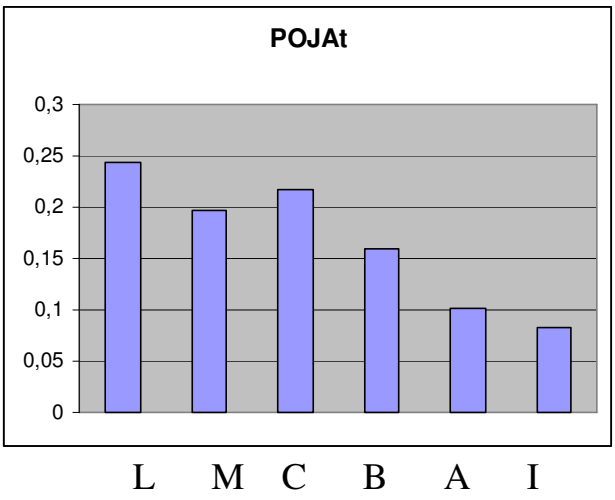
Puttonen pelasi mittauspöytäkirjan mukaan 22 päivänä. Lasketaan yhteen voitot ja tappiot, ja saadaan summaksi – 89 €. Keskimääräinen tappio pelipäivää kohden on siten $\frac{-89\,€}{22\,\mathrm{d}} \approx -4€/\mathrm{d}$.

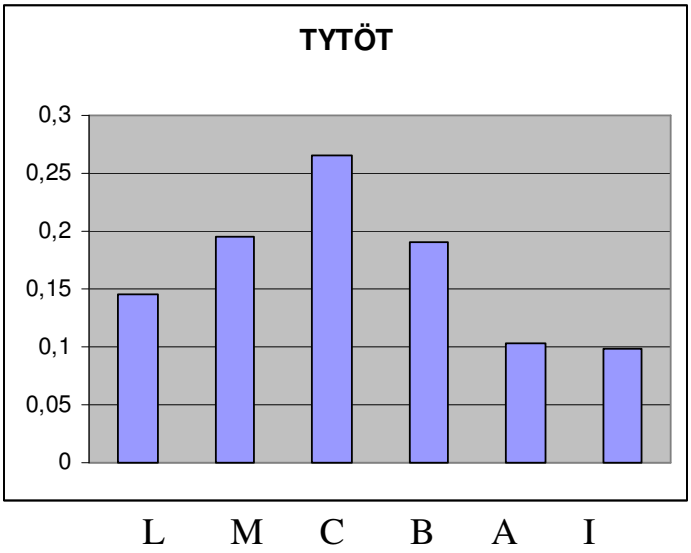
Jakaumalla on kaksi tyyppiarvoa, jotka luokkakeskuksin voidaan ilmoittaa, jotta Puttonen hävisi keskimäärin 15 euroa tai voitti vitosen. Nämä saa tietenkin ilmoittaa myös täsmällisin luokkarajoin.

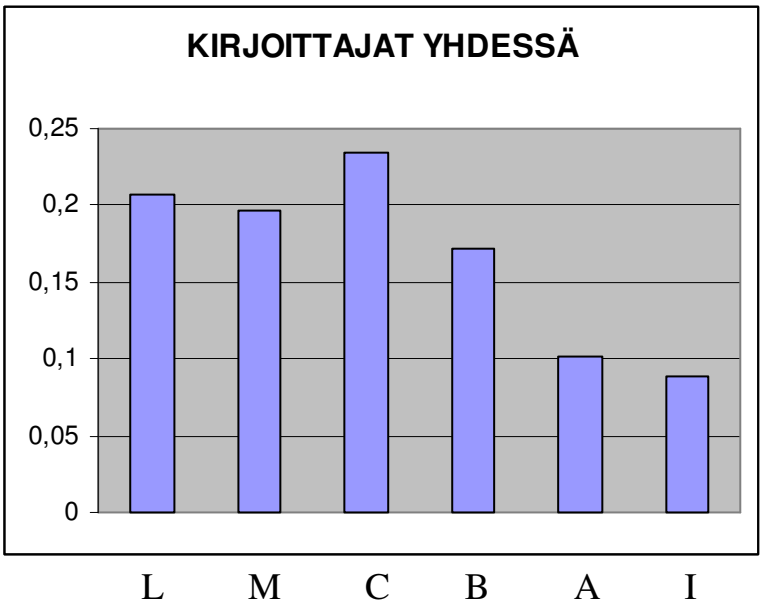
TEHTÄVÄ 3

Taulukkoon laskettu suhteelliset frekvenssi prosentteina

	P	T	Yhteensä	p [P]	p(T)	p(kaikki)
laudatur	1617	584	2201	0,243268	0,145709	0,20657
magna	1308	784	2092	0,196781	0,195609	0,19634
cum laude	1439	1065	2504	0,216489	0,265719	0,235007
lubenter	1061	767	1828	0,159621	0,191367	0,171563
appro	673	414	1087	0,101249	0,103293	0,102018
hylätty	549	394	943	0,082594	0,098303	0,088503
summa	6647	4008	10655	1	1	1


POJAt
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
L M C B A I


TYTÖT
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
L M C B A I

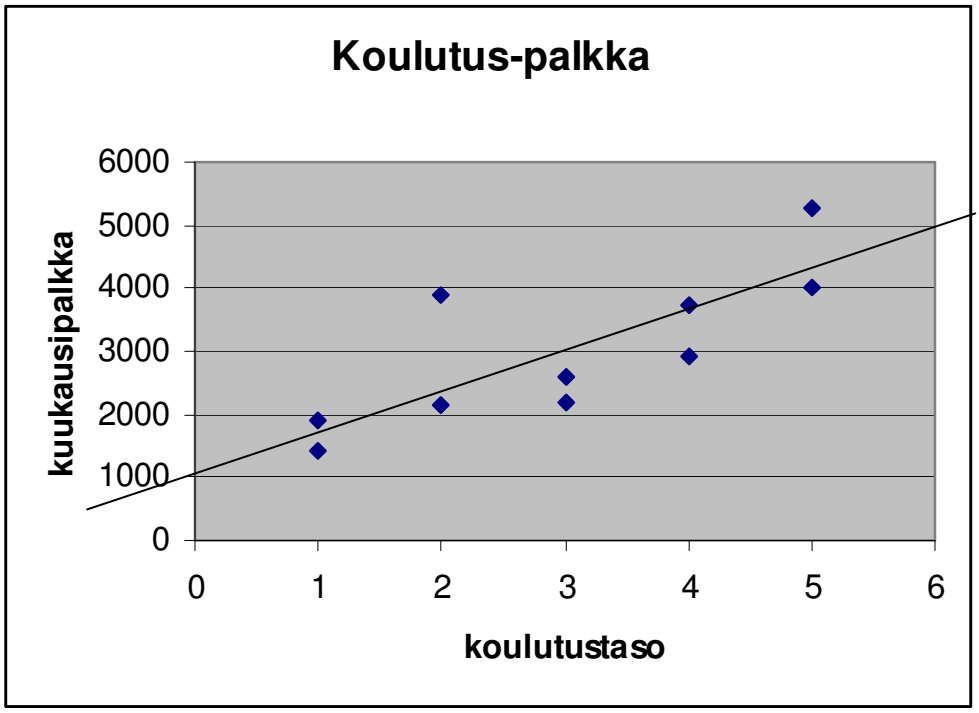

KIRJOITTAJAT YHDESSÄ
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
L M C B A I

TEHTÄVÄ 4

arvosana	frekvenssi	x - keskiarvo	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
4	3	-2,7185	7,39024225	22,17072675
5	6	-1,7185	2,95324225	17,7194535
6	6	-0,7185	0,51624225	3,0974535
7	5	0,2815	0,07924225	0,39621125
8	7	1,2815	1,64224225	11,49569575
9	4	2,2815	5,20524225	20,820969
10	1	3,2815	10,76824225	10,76824225
summa	32			86,468752

$$\sigma = \sqrt{\frac{86.468752}{32}} = 1.6438... \approx 1.64$$

TEHTÄVÄ 5



Regressiosuoralle saadaan Excel-ohjelman avulla yhtälö

palkka = 1114.5 + 630.5 x koulutustaso
$y = 1114.5 + 630.5 \cdot x$

Korrelaatiokertoimelle ohjelma antaa arvoksi noin 0.788
Regressiosuora on sellainen, joka liittyy kuvaajan pisteisiin mahdollisimman hyvin. Poikkeamien neliöiden summa on mahdollisimman pieni.

Tämän (kuvitellun) esimerkin mukaan korrelaatio on melko voimakas. Kannattaa siis hankkia koulutusammatti, mikäli pitää itselleen tärkeänä nostaa kovaa palkkaa.

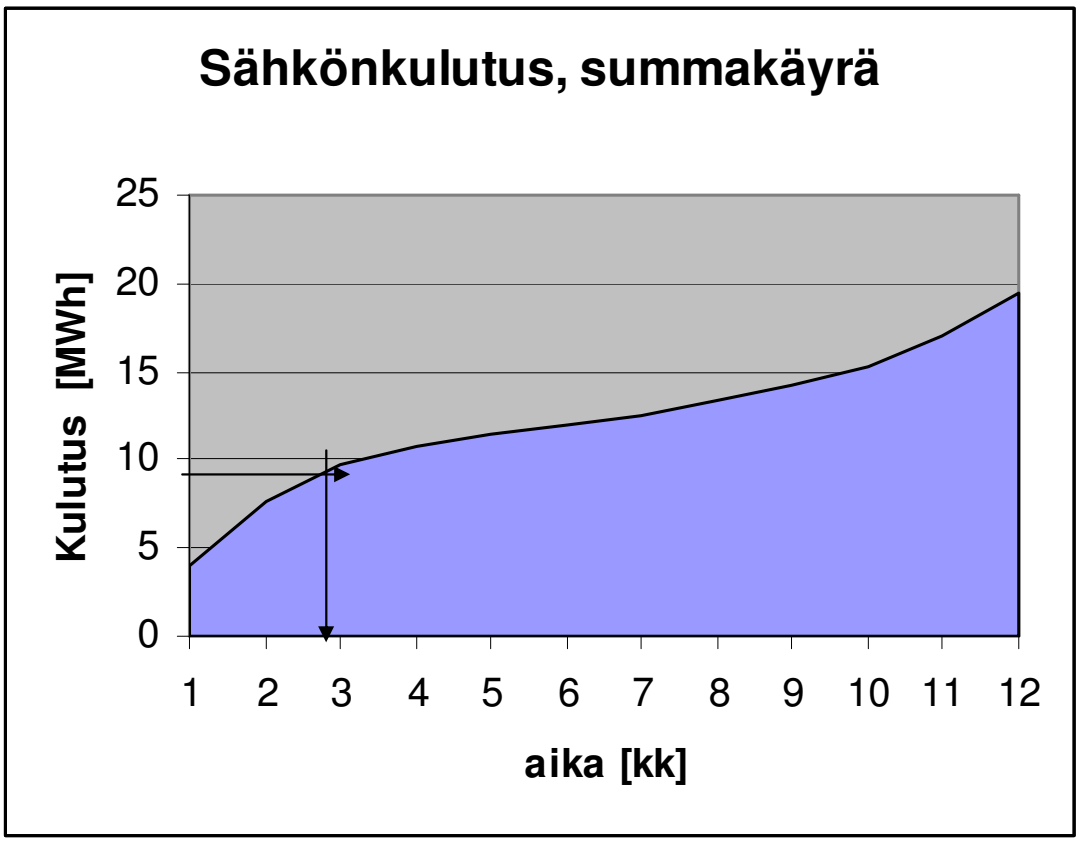
TEHTÄVÄ 6

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 8.62 + 12 \cdot 7.77}{32} = 8.30125 \approx 8.30$$

TEHTÄVÄ 7

kk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
MWh	4	3.7	2.1	1	0.6	0.6	0.5	0.8	0.9	1	1.9	2.3
Σ	4	7.7	9.8	10.8	11.4	12	12.5	13.3	14.2	15.2	17.1	19.4

Kuvassa kuukausittain summautuva kulutus.
Sähköä kului kaikkiaan 19.4 MWh = 19400 kWh ja tästä kertyy kulutetulle energialle hintaa kaikkiaan $19400\,\text{kWh} \cdot 0.0915\,\frac{€}{\text{kWh}} = 1775.10€$.
Vuotuonen sähkölasku on siten $1775.10€ + 12 \cdot 9\,€ = 1883.10\,€$.
Kuukaudessa sähköön meni keskimäärin noin 157 €.



Kulutetun energian 19.4 MWh puolikas on 9.7 MWh. Kun tästä pystyakselin pisteestä ammutaan summakäyrälle ja siihen sattuvasta pisteestä kuvan mukaan suoraan vaaka-akselille, näyttäisi vuotuisesta energiasta puolet käytetyn jo ennen maaliskuun loppua.

TEHTÄVÄ 8

a) P(2) = 1/6
b) P(silmäluku $\geq$ 2) = 5/6
c) P(pariton) = 3/6 = ½
d) P (silmäluku $\leq$ 3) = 3/6 = ½
e) P(silmäluku ei 1 eikä 6) = 4/6 = 2/3

TEHTÄVÄ 9

Pelataan korttia:

a) P(♠) = 13/52 = ¼
b) P(10) = 4/42 = 1/13
c) P(♠10) = 1/52
d) P(6 $\leq$ kortin silmäluku $\leq$ 10) = 20/52 = 5/13

TEHTÄVÄ 10

Tikka osuu tavalliseen tikkatauluun. Vaikka erilaiset pisteitä antavat tulosmahdollisuudet muodostavat joukon E = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, niin esimerkiksi tapahtumat P{saadaan 5} ja P{saadaan 6} eivät ole symmetrisiä, siis yhtä mahdollisia. Sitä paitsi tikkataulussa taitaa olla reunassa aluetta, josta ei saa ollenkaan pisteitä, joten P{saadaan 5} ei ole 1/10.

TEHTÄVÄ 11

a) P(voi syödä) = 8/10 = 4/5.
b) P(piimää) = 0, koska kaapissa ei kuvauksen mukaan piimäpurkkia ole
c) P(pilaantunutta jogurttia) = 2/10 = 1/5
d) P(joko pilaantunutta tai syömiskelpoista) = 10/10 = 1. Kyseessä nyt ns. varma tapaus

TEHTÄVÄ 12

Vuonna 1978 syntynyt henkilö valitaan umpimähkään, esim. väestörekisteritiedostosta. Ainut varma tieto on siis se, että hän on syntynyt vuonna 1978 ja on muutoin tyttö. Mahdollisia syntymäpäiviä on 365, koska 1978 ei ole karkausvuosi.

Tässä tehtävässä on hyötyä, jos osaa vanhan lorun; syys- huhti- kesä – marraskuuss´on päivää kolme kymmentä. Kahdeksan kolmatta helmikuussa vaan muissa yksi neljättä.

a) P(15**78 – 016N) = 12/365 = 0.032876… ≈ 0.033
b) P(29**78 – 016N) = 11/365 = 0.03013698... ≈ 0.030
c) P(31**78 – 016N) = 7/365 = 0.019178... ≈ 0.019

TEHTÄVÄ 13

Kun kolminumeroisen luvun numerot arvotaan 6-kanttisella nopalla, niin todennäköisyyksiä laskettaessa turvaudutaan tuloperiaatteeseen:

a) P(222) = $\frac{1\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{1}{216}$

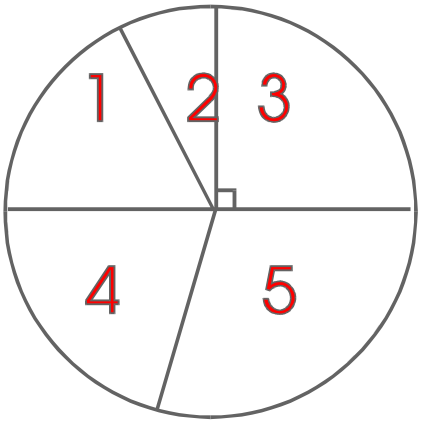
b) P(651) = $\frac{1\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{1}{216}$

c) P(parillinen) = $\frac{6\cdot 6\cdot 3}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{1}{2}$

d) P(jokainen numero $\leq$ 3) = $\frac{3\cdot 3\cdot 3}{6\cdot 6\cdot 6}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$.

(a) 1/216 d) 1/8)

TEHTÄVÄ 14



Nyt kulmien astelukuja hyödynnetään. On siis 2:lla merkityn sektorin keskuskulma on 30^0, ja nelosella merkityn 75^0. Millä todennäköisyydellä onnenpyörä pysähtyy

a) P(3) = 90/360 = 1/4
b) P(1 tai 2 tai 3) = (60 + 30 + 90)/360 = 1/2
c) P(ei nelonen) = (360 – 75)/360 = 19/24
d) P(kulman asteluku) = x/360 = 15/32 , josta

$$x = 360\cdot\frac{15^o}{32}=168.75^o$$

TEHTÄVÄ 15

Kukin ottelu voi päättyä kolmella eri tavalla. Rivejä on siten 3^{13} = 1594323.

TEHTÄVÄ 16

a) Ensimmäinen nro voidaan valita 4 tavalla, toinen kolmella, kolmas kahdella. Tulo-periaate antaa, jotta mahdollisuuksia on kaikkiaan $4\cdot 3\cdot 2=24$.

b) Kukin numero voidaan valita nyt neljällä eri tavalla. Siten mahdollisuuksia on kaikkiaan $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

TEHTÄVÄ 17

Luokassa on 36 oppilasta, joista 24 on tyttöjä. Pojista 7 ja tytöistä 14 on yli 18-vuotiasta.

a) P(alle 18 – vuotias tyttö) = $\frac{24-14}{36} = \frac{5}{18}$

b) P(poika) = $\frac{236-24}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

c) P(18 täyttänyt) = $\frac{7+14}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

TEHTÄVÄ 18

a) P(molemmat tyttöjä) = $\frac{24 \cdot 23}{36 \cdot 35} = \frac{2 \cdot 23}{3 \cdot 35} = \frac{46}{105}$

b) P(molemmat alle 18-vuotiaita poikia) = $\frac{5 \cdot 4}{36 \cdot 35} = \frac{1 \cdot 1}{9 \cdot 7} = \frac{1}{63}$

TEHTÄVÄ 19

Kun rekisterilaattaa tehtäessä tunnuksessa on kolme kirjainta (käytettävissä 26 kirjainta) ja kolminumeroisesta luvusta, jonka ensimmäinen numero ei saa olla nolla, niin erilaisia laattoja voi tuloperiaatteen nojalla olla
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 15818400$

TEHTÄVÄ 20

Suomen kielen aakkosissa on 29 kirjainta. Vokaaleja ovat a, e, i, o, u, y, ä, ö, å eli 9 kappaletta

a) P(vokaali) = 9/29

b) P(vokaali, vokaali, vokaali) = $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 8}{27 \cdot 28 \cdot 29} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 29} = \frac{2}{3 \cdot 29} = \frac{2}{87}$

c) P(konsonantti, konsonantti, konsonantti) = $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 18}{29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{19 \cdot 5 \cdot 2}{29 \cdot 7 \cdot 9} =$

$= 190/609 \approx 0.31.$

Myös konsonanttien todennäköisyys on laskettu periaatteella, ettei sama kirjain saa esiintyä useampaa kertaa. Mikäli saisi, olisi $P = (20/29)^3 \approx 0.33$

TEHTÄVÄ 21

a) Valinnassa on järjestys tärkeä, joten erilaisten toimikuntien lukumäärä = 25-alkioisen joukon 4 – permutaatioiden lukumäärä:

n(toimikunnat) = $\frac{25!}{(25-4)!} = 303600$

b) P(kaikki poikia) = $\frac{\frac{8!}{(8-4)!}}{303600} = \frac{7}{1265} \approx 0.0055$

c) P(kaikki tyttöjä) = $\frac{\frac{17!}{(17-4)!}}{303600} = \frac{238}{1265} \approx 0.188$

d) P(JM puheenjohtaja + 3 tyttöä) = $\frac{1 \cdot \frac{17!}{(17-3)!}}{303600} = \frac{17}{1265} \approx 0.013$

TEHTÄVÄ 22

Kolme numeroarvoltaan erilaista pelikorttia voi olla 3! erilaisessa järjestyksessä, mutta vain yksi näistä on suuruusjärjestys pienimmästä suurimpaan.

P(suuruusjärjestys) = $\frac{1}{6}$

TEHTÄVÄ 23

Seitsemänhenkisen joukkueen lähtöjärjestyksiä on kaikkiaan 7!

a) Kun asetetaan ehto, jonka mukaan kolme poikaa juoksee kolme ensimmäistä osuutta, mahdollisuuksia on 3! ja vastaavasti tytöt voivat juosta viimeiset neljä vuoroa 4! erilaisessa järjestyksessä. Poikien järjestysten lukumäärä on riippumaton tyttöjen juoksujärjestyksestä, joten tuloperiaatetta voi soveltaa:

P(PPPTTTT) = $\frac{3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{35}$

b) P(TPTPTPT) = $\frac{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{7!} = \frac{1}{35}$.

TEHTÄVÄ 24

a) n(järjestys) = 6·1·5·4·3·2·1= 6!
b) sama vastaus
c) n = 5·1·4·3·2·1·1 =5! = 120

TEHTÄVÄ 25

Auton neljä pyörännapaa voidaan asettaa järjestykseen esimerkiksi kiertämällä autoa myötäpäivään.

a) Auton neljällä renkaalla on 4! = 24 erilaista järjestystä ja vain yksi näistä on oikea, jos tahdotaan että jokainen rengas on entisellä paikallaan; P (entiset paikat) = $\frac{1}{24}$.

b) Kun tarkastellaan autosta kuljettajan puolta, siellä on ollut kaksi rengasta. Jos halutaan renkaiden pyörimissuunnan säilyvän, on kuljettajan puolelle tuotava kuljettajan puolella edellisvuonnakin olleet renkaat, mutta nyt saa eturengas olla takana tai entisellä paikallaan. Kun tämä valinta tehdään, niin jäljellä olevien apumiehen puoleisten renkaiden pyörimissuunta on automaattisesti oikea

P(pyörimissuunta säilyy) = $\frac{n(VT)\cdot n(VE)\cdot n(OE)\cdot n(OT)}{24} = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{24} = \frac{1}{6}$

TEHTÄVÄ 26

a) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\cdot 5!} = 1$ b) $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$ c) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ d) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

d) $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5$ ja e) $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!\cdot 0!} = 1$.

TEHTÄVÄ 27

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\cdot(n-2)!} =$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

TEHTÄVÄ 28

Erikan poimiessa kyniä sanotulla tavalla on taustana neljän alkion valinta yhdeksän alkion joukosta, käytetään siis kombinaatioita.

a) $P(SSSS) = \dfrac{\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}} = \dfrac{5}{126}$ ja b) $P(SSPP) = \dfrac{\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}} = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{126} = \dfrac{10 \cdot 6}{126} = \dfrac{10}{21}$

TEHTÄVÄ 29

Tässä asetelmassa on kyse siitä, että valitaan 14 alkion joukosta neljän hengen osajoukkoja. Kombinatoriikkaa jälleen. Olkoon maihin pääsevien suomalaisten lukumäärä k. Ei-suomalaisia valittaessa heitä poimitaan 16 ulkomaalaisen joukosta.

a) $P(k=0) = \dfrac{\binom{16}{4}}{\binom{30}{4}} = \dfrac{1820}{27405} = \dfrac{52}{783}$

b) $P(k=1) = \dfrac{\binom{16}{3}\binom{14}{1}}{27405} = \dfrac{7840}{27405} = \dfrac{224}{783}$

c) $P(k=2) = \dfrac{\binom{16}{2}\binom{14}{2}}{27405} = \dfrac{312}{783} = \dfrac{104}{261}$ ja d) $P(k=3) = \dfrac{\binom{16}{1}\binom{14}{3}}{27405} = \dfrac{5824}{27405} = \dfrac{832}{3915}$

e) $P(k=4) = \dfrac{\binom{14}{4}}{27405} = \dfrac{1001}{27405} = \dfrac{143}{3915}$

f) $\sum_{i=0}^{4} P(k=i) = \dfrac{52}{783} + \dfrac{224}{783} + \dfrac{312}{783} + \dfrac{832}{3915} + \dfrac{143}{3915} = 1$ ainakin laskimen mukaan.

TEHTÄVÄ 30

Hyllyllä on kaikkiaan 10 hattua, ja pomojen hävittyä eteisestä hyllyllä on enää kuusi hattua. Nyt on 10 alkion joukosta poimittu neljä.

a) Kun kullakin pomolla tulee olla oma hattunsa, on siepattujen hattujen järjestyskin oltava oikea. Tässä ollaan nyt permutaatioiden alueella. Poimitaan siis 10 alkion joukosta neljän alkion järjestettyjä osajoukkoja, joista hattujen sattuessa oikeille omistajille vain yksi permutaatio on oikea.

$$\text{P(omat hatut)} = \frac{1}{\frac{10!}{(10-4)!}} = \frac{6!}{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{5040}$$

b) Kun onnistuneen paon jälkeen istutaan autossa, ja katsellaan hattuja, niin todetaan, että hatut löytävät oikeat omistajat, ehkä tehdään pari vaihtoa. Tässä tilanteessa yksi 10-alkoisen joukon 4-kombinaatio on vievä suotuisaan tulokseen.

$$\text{P(omat hatut, kun ehkä vaihdettu)} = \frac{1}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}$$

c) Kun onnistuneen paon jälkeen istutaan autossa, ja katsellaan hattuja, niin todetaan, että kukaan pomo ei löydä omaansa. Jokainen on siepannut henkivartijahatun:

$$\text{P(henkivartijahatut)} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

TEHTÄVÄ 31

Pokeriyhdistelmän poiminta, otetaan 52-alkioisesta joukosta 5 alkion osajoukko.

a) Tämä yhdistelmä, neljä korttia samaa maata ja viides muuta maata on avopokerin ns. ”neljän väri”, joka voittaa yhden parin ja ”neljän sarjan”. Suotuisat kortit määrätään useassa vaiheessa:

- Mikä maa, neljä mahdollisuutta
- mitkä neljä korttia tätä maata, mahdollisuuksia $\binom{13}{4}$
- lopuksi viides kortti, valittuun maahan kuulumaton, 39 mahdollisuutta

$$\text{P(neljän väri)} = \frac{4 \cdot \binom{13}{4} \cdot 39}{\binom{52}{5}} = \frac{111540}{2598960} = \frac{143}{3332} \approx 0.043$$

b) P(neliluku) = $\frac{13 \cdot 48}{2598960} = \frac{1}{4165}$, eli kysytään, mistä silmäluvusta kaikki neljä korttia (13 mahdollisuutta) ja sen jälkeen viides kortti on mahdollista valita 48 kortin joukosta.

TEHTÄVÄ 32

Poimitaan kahdeksan alkion joukosta kolmen alkion osajoukkoja. Olkoon pilaantumattomien, syömiskelpoisten jogurttien lukumäärä k.

a) $P(k=2)=\dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

b) $P(k\le 1)=P(k=0 \text{ tai } 1)=P(k=0)+P(k=1)=0+\dfrac{\binom{6}{1}\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$, sillä se vaihtoehto, ettei Helena ei syö yhtään pilaantumatonta, on mahdoton. Hänhän syö kolme jogurttia joka tapauksessa, ja pilaantuneita on vain kaksi.

c) $P(k\ge 2)=P(k=2 \text{ tai } 3)=P(k=2)+P(k=3)=\dfrac{15}{28}+\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{15+10}{28}=\dfrac{25}{28}$

TEHTÄVÄ 33

Poimitaan kuuden alkion joukosta 2 alkion osajoukkoja. Olkoon niiden kirjojen lukumäärä, joita Erja ei ole aiemmin lukenut = k.

a) $P(k=2)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

b) On lukenut korkeintaan toisen toteutuu siis silloin, kun on lukenut vain toisen taikka ei kumpaakaan, missä jälkimmäisen vaihtoehdon todennäköisyys laskettiin jo tehtävän ensimmäisessä osassa. Tällöin siis ei-lukemisen kohteeksi joutuneiden kirjojen luku on 2 tai 1.

c) $P(k=2 \text{ tai } k=1)==\dfrac{2}{5}+\dfrac{4\cdot 2}{15}=\dfrac{6}{15}+\dfrac{8}{15}=\dfrac{14}{15}$

TEHTÄVÄ 34

Tässä tehtävässä valitaan yhdeksän alkion joukosta kahden alkion osajoukkoja.

a) P(●●) = $\dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

b) P(samanväriset) = P(●●) + P(O O) = $\dfrac{5}{18} + \dfrac{\binom{4}{2}}{36} = \dfrac{5}{18} + \dfrac{3}{18} = \dfrac{8}{18} = \dfrac{4}{9}$

c) P(eriväriset) = 1 – P(samanväriset) = $1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

TEHTÄVÄ 35

a) P(€,€) = 0, sillä taskussa ei ole kahta euroa.

b) P(SKr,SKr) = $\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

c) P(saman valtakunnan rahoja) = P(SKr,SKr) + P(NKr,NKr) = $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{4}{15}$

d) P(eri valtakunnan rahoja) = 1 – P(saman valtak) = $1 - \dfrac{4}{15} = \dfrac{11}{15}$

TEHTÄVÄ 36

a) P(ykkönen esiintyy) = 1– P(ei esiinny) = $1 - \dfrac{\binom{38}{7}}{\binom{39}{7}} = 1 - \dfrac{12620256}{15380937} = \dfrac{7}{39}$

b) P(1 ja 2 esiintyvät) = $\dfrac{\binom{2}{2}\binom{37}{5}}{\binom{39}{7}} = \dfrac{435897}{15380937} = \dfrac{7}{247}$

TEHTÄVÄ 37

a) P(ainakin 1 ässä) = 1 – P(ei yhtään ässää) = $1-\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}=1-\frac{1712304}{2598960}=$

$= 0.341.... \approx 0.34$

b) b) P(ainakin 1 ruutu) = 1 – P(ei yhtään ruutua) = $1-\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}=1-\frac{575757}{2598960}=$

$= \frac{7411}{9520}=0.77846.... \approx 0.78$

TEHTÄVÄ 38

a) P(kaikki 4 parittomia) = $\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6}=\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{1}{16}$

b) P(ainakin 1 parillinen) = 1 – P(ei yhtään parillista) = $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

c) P(ainakin 1 kuutonen) = 1 – P(ei yhtään kuutosta) = $1-(\frac{5}{6})^4=\frac{671}{1296}$

TEHTÄVÄ 39

Merkitään A = Antti osuu ja $\overline{A}$ = Antti ampuu ohi. Minnalle vastaavasti.

a) P(A ja M) = 0.15·0.75 = 0.1125 ≈ 0.11.
b) P($\overline{A}$ ja $\overline{M}$) $=0.25\cdot 0.85=0.2125\approx 0.21$
c) P(A ja $\overline{M}$) $=0.75\cdot 0.85=0.6375\approx 0.64$

TEHTÄVÄ 40

Käytetään edellistehtävän vastaavia merkintöjä; kullekin viljalajille sen ensimmäistä kirjainta.

a) P(R ja O ja V ja $\overline{K}$) $=0.95\cdot 0.85\cdot 0.75\cdot 0.35=0.21196875\approx 0.21$
b) P(R ja O ja V ja K) $=0.95\cdot 0.85\cdot 0.75\cdot 0.65=0.39365625\approx 0.39$
c) P(itää vähintään 3 siementä) = P(itää 3 siementä) + P(kaikki itävät) =
= P(R ja O ja V ja $\overline{K}$) + P(R ja O ja $\overline{V}$ ja K) + P(R ja $\overline{O}$ ja V ja K) +

$P(\overline{R} \text{ ja O ja V ja K}) + P(R \text{ ja O ja V ja K}) =$
$= 0.21196875 + 0.95 \cdot 0.85 \cdot 0.25 \cdot 0.65 + 0.95 \cdot 0.15 \cdot 0.75 \cdot 0.65 +$
$+ 0.05 \cdot 0.85 \cdot 0.75 \cdot 0.65 + 0.39365625 =$
$= 0.21196875 + 0.13121875 + 0.06946875 + 0.02071875 + 0.39365625 =$
$= 0.82703125 \approx 0.83.$

TEHTÄVÄ 41

a) Olkoon kuutosten lukumäärä k. $P(k = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{15552} \approx 0.20$

b) Parillisten määrä = m. $P(m = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64} \approx 0.23.$

TEHTÄVÄ 42

Olkoon Jämsän kautta ajavien rekkojen lukumäärä = k.

$P(k = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625} = 0.3456 \approx 0.35$

TEHTÄVÄ 43

Kouluviikolla on viisi työpäivää. Ruokailu toistuu siis viisi kertaa, n = 5. Tässä esimerkissä P(etuilu huomataan) = p = 0.2, jolloin q = 0.8. Tapahtuma ”joutuu jonon viimeiseksi korkeintaan kerran” toteutuu, kun joutuu hännille kerran taikka ei kertaakaan.
Olkoon k = hännille joutumisien lukumäärä viikon aikana.

$P(k \leq 1) = P(k = 0) + P(k = 1) = 0.8^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.2 \cdot 0.8^4 = \frac{1024}{3125} + \frac{256}{625} = \frac{2304}{3125} \approx 0.74.$

TEHTÄVÄ 44

Merkitään oikein veikattujen otteluiden lukumäärä = k. Tässä n = 13.

a) $P(k = 10) = \binom{13}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 286 \cdot \frac{8}{1594323} = \frac{2288}{1594323} \approx 0.0014$

b) $P(k \leq 1) = P(k = 0) + P(k = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{13} + \binom{13}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{12} =$

$$= \frac{8192}{1594323} + \frac{13 \cdot 4096}{1594323} = \frac{61440}{1594323} = 0.038536... \approx 0.039 .$$

TEHTÄVÄ 45

$$P(k=0) = (1-0.84)^5 = \left(\frac{4}{25}\right)^5 = \frac{1024}{9765625} = 0.0001048576$$

$$P(k=1) = \binom{5}{1} \cdot 0.84 \cdot 0.16^4 = 5 \cdot \left(\frac{21}{25}\right)\left(\frac{4}{25}\right)^4 = \frac{5376}{1953125} = 0.002752512$$

$$P(k=2) = \binom{5}{2} \cdot 0.84^2 \cdot 0.16^3 = 10 \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^2\left(\frac{4}{25}\right)^3 = \frac{56448}{1953125} = 0.028901376$$

$$P(k=3) = \binom{5}{3} \cdot 0.84^3 \cdot 0.16^2 = 10 \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^3\left(\frac{4}{25}\right)^2 = \frac{296352}{1953125} = 0.151732224$$

$$P(k=4) = \binom{5}{4} \cdot 0.84^4 \cdot 0.16 = 5 \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^4\left(\frac{4}{25}\right) = \frac{777924}{1953125} = 0.398297088$$

$$P(k=5) = 0.84^5 = \left(\frac{21}{25}\right)^5 = \frac{4084101}{9765625} = 0.4182119424$$

k	P(k) likiarvoin
0	0.0001048576
1	0.002752512
2	0.028901376
3	0.151732224
4	0.398297088
5	0.4182119424

Suurin todennäköisyys viiden laukauksen sarjassa on tapahtumalla, missä jokainen luoti käypi maaliin.

$$P(k \geq 4) = P(k=4) + P(k=4) = \frac{777924}{1953125} + \frac{4084101}{9765625} \approx 0.8165$$

$$P(k \leq 2) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) = \frac{1024}{9765625} + \frac{5376}{1953125} + \frac{56448}{1953125} \approx 0.0318$$

TEHTÄVÄ 46

Todennäköisyys sille, että umpimähkään valittu käpykyläläinen äänesti, on $\frac{3746}{4759} =$ 0.787140155….

b) Kun poimitaan umpimähkään kolme käpykyläläistä, kaikki kolme olivat äänestäneet todennäköisyydellä $(\frac{3746}{4759})^3 = 0.487703... \approx 0.49$.

a) Oli jättänyt äänestämättä korkeintaan 1 on ilmaistavissa myös niin, että vähintään kaksi (valituista kolmesta) oli äänestänyt:

P(äänesti 2) + P(äänesti 3) = $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3746}{4759}\right)^2 \cdot \frac{1013}{4759} + \left(\frac{3746}{4759}\right)^3 = 0.8833... \approx 0.88$

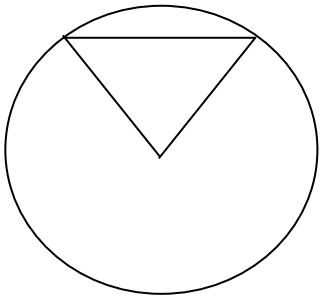
TEHTÄVÄ 47

P(0.28xyx….) = $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

P(0.yyabc…) = $\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

Lieneekö kysymys hiukan huonosti muotoiltu? desimaaliesityksen ensimmäinen numero on tietenkin aina 0 (erittäin pieni todennäköisyys olla ykkönen) , ja vasta toinen numero voi olla nollasta eroava. sanalla desimaaliesitys tarkoitetaan kuitenkin sitä numerosarjaa, joka alkaa desimaalipisteen jälkeen.

TEHTÄVÄ 48



Jänne on säteen suuruinen, jos keskuskulma on tasan 60^0. Kun ensimmäinen piste on kiinnitetty, niin toi sen on oltava siitä korkeintaan sillä etäisyydellä, jolla syntyy enintään 120 asteen kulma, kun sanotut pisteet yhdistetään ympyrän keskipisteeseen. Toinen piste voi siis mennä 60 astetta ensimmäisestä kumpaan tahansa kertosuuntaan

$$P = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$

TEHTÄVÄ 49

Äänestäneitä oli tehtävän 48 mukaan kaikkiaan 3746. Taulukossa olevien äänimäärien summa täsmää. Jos valitaan yksi käpykyläläinen umpimähkään, niin

P(äänesti kokoomusta) = $\frac{747}{3746}$

P(äänesti SDP) = $\frac{746}{3746}$

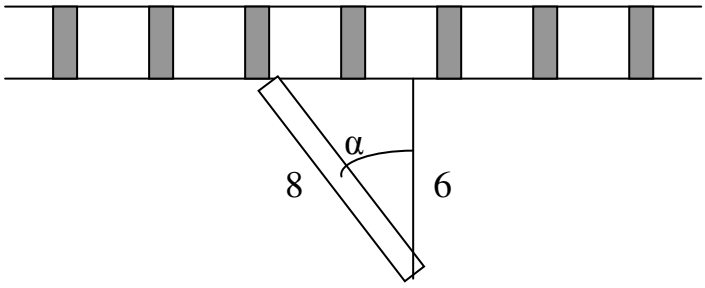
P(äänesti krist. + keskusta) = $\frac{1333}{3746}$

a) Kertolaskusäännön avulla saadaan = $\frac{747}{3746} \cdot \frac{746}{3746} \cdot \frac{1333}{3746} \cdot \frac{1332}{3746} = 0.0050248\ldots$

Minkähän takia tämä saattaa olla väärin? Miksikähän tulos 0.12059… on suurella todennäköisyydellä lähempänä oikeaa?

b) P(kukaan ei äänestänyt kokoomusta) = $\left(\frac{3746-747}{3746}\right)^4 = 0.4108... \approx 0.41$

TEHTÄVÄ 50



Kun otetaan tarkasteluun kuvan mukainen rajatapaus, missä pylväs juuri ja juuri ulottuu kiskolle, niin saadaan

$\cos\alpha = \frac{6}{8}$, josta $\alpha = 41.4096....^0$

Pylväällä on täten mahdollisia kaatumissuuntia kaikkiaan sen verran, mitä täydessä kulmassa on asteita eli 360. Näistä kiskolle osumisen kannalta niin sanottuja suotuisia astelukuja on $2 \cdot 41.4096....^0 = 82.819\ldots^0$

P(osuu kiskoon) = $\frac{82.819244...}{360} = 0.23005... \approx 0.23$.

TEHTÄVÄ 51

Olkoon lottorivissä oikein veikattuja $\underline{x}$

$$P(\underline{x}=0)=\frac{\binom{32}{7}}{\binom{39}{7}}=\frac{3365856}{15380937}\approx 0.218833$$

$$P(\underline{x}=1)=\frac{\binom{32}{6}\binom{7}{1}}{\binom{39}{7}}=\frac{6343344}{15380937}\approx 0.412416$$

jne. Taulukoidaan

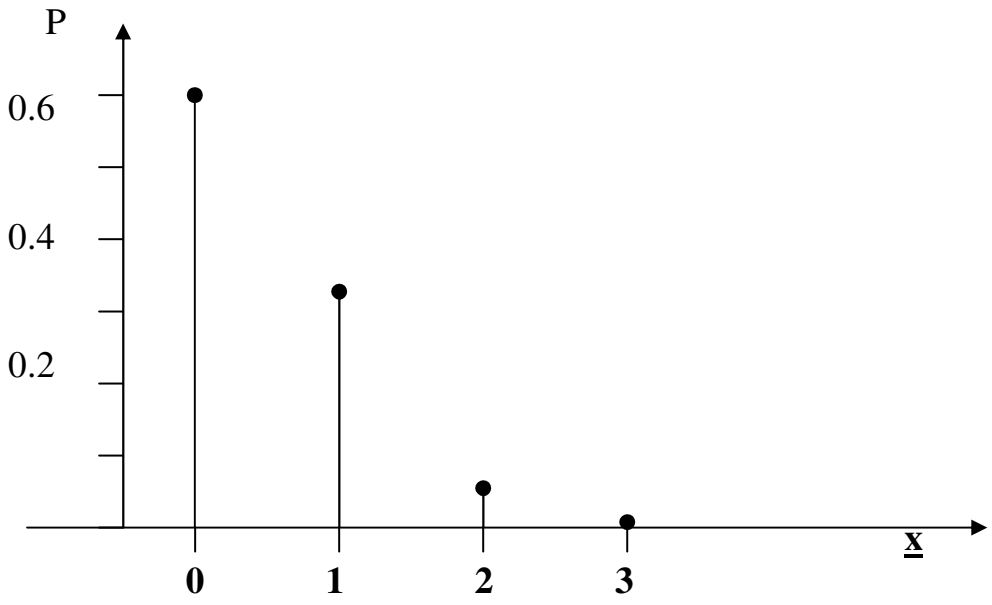
k	0	1	2	3	4	5	6
P($\underline{x}$=k)	0.2188	0.4124	0.2749	0.08182	0.0112	0.000677	0.00000145

$P(\underline{x}=7)\approx 0.0000000650155$

Näiden likiarvojen summa on 0.999981721

TEHTÄVÄ 52

Tässä on kyseessä binomitodennäköisyys. Viallisia säätimiä voi olla 0, 1, 2 tai 3.



$$P(\underline{x}=0)=\binom{3}{0}\cdot 0.16^0\cdot 0.84^3=\frac{9261}{15625}=0.592704$$

$$P(\underline{x}=1)=\binom{3}{1}\cdot 0.16^1\cdot 0.84^2=\frac{5292}{15625}=0.338688$$

$$P(\underline{x}=2)=\binom{3}{2}\cdot 0.16^2\cdot 0.84^1=\frac{1008}{15625}=0.064512$$

$$P(\underline{x}=3)=\binom{3}{3}\cdot 0.16^3\cdot 0.84^0=\frac{66}{15625}=0.004096$$

TEHTÄVÄ 53

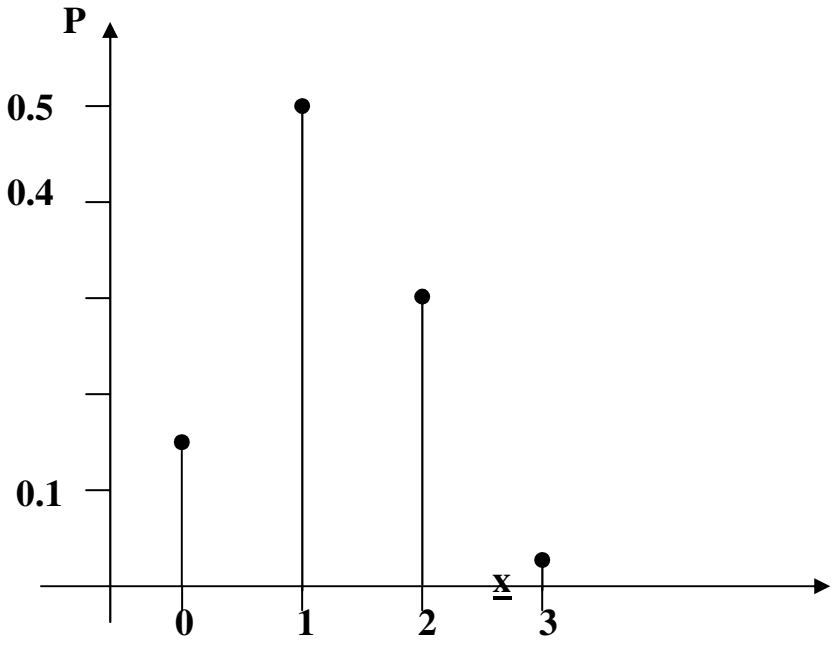
Olkoon Helenan syömien pilaantuneiden jogurttien lukumäärä $\underline{x}$, mikä tässä voi saada arvot 0, 1, 2, tai 3.

$$P(\underline{x}=0)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

$$P(\underline{x}=1)=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{210}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

$$P(\underline{x}=2)=\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{210}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

$$P(\underline{x}=3)=\frac{\binom{4}{3}}{210}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

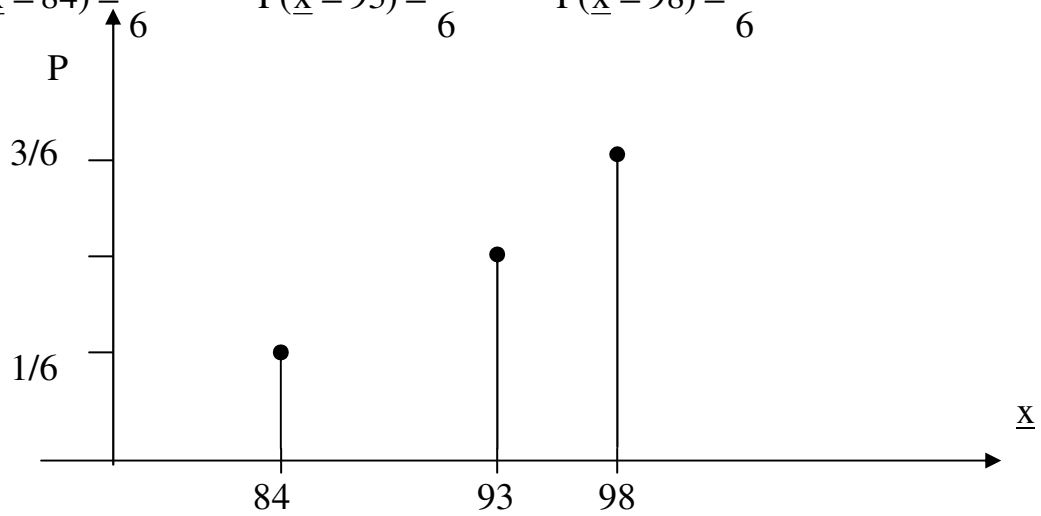


$$\mathbf{E\underline{x}} = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{5+6+1}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

TEHTÄVÄ 54

Mahdolliset sikaparimassat ovat (77, 84), (77, 93), (77, 98), (84, 93), (84, 98) tai (93, 98). Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ voi siten saada arvot 84, 93 tai 98 kg. Alkeistapauksia on nyt ainoastaan kuusi kappaletta.

$P(\underline{x} = 84) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\underline{x} = 93) = \frac{2}{6}$ $\quad P(\underline{x} = 98) = \frac{3}{6}$



$$\mathbf{E\underline{x}} = 84 \cdot \frac{1}{6} + 93 \cdot \frac{2}{6} + 98 \cdot \frac{3}{6} = \frac{84+186+294}{10} = 94$$

$$\mathbf{D\underline{x}} = \sqrt{\frac{1}{6}(84-94)^2 + \frac{2}{6}(93-94)^2 + \frac{3}{6}(98-94)^2} = \frac{100+2+48}{6} = 5$$

Vastaus: odotusarvo on 94 kg ja keskihajonta on 5 kg.

TEHTÄVÄ 55

Kutsuttuja miehiä eli satunnaismuuttuja = $\underline{x}$ voi saada arvot 0, 1, 2, 3 tai 4.

$$P(\underline{x}=0) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{126}$$

$$P(\underline{x}=1) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{126} = \frac{20}{126}$$

$$P(\underline{x}=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{126} = \frac{60}{126}$$

$$P(\underline{x}=3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{126} = \frac{40}{126}$$

$$P(\underline{x}=1) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{4}}{126} = \frac{5}{126}$$

$$\mathbf{E\underline{x}} = 0\cdot\frac{1}{126} + 1\cdot\frac{20}{126} + 2\cdot\frac{60}{126} + 3\cdot\frac{40}{126} + 4\cdot\frac{5}{126} = \frac{20+120+120+20}{126} = \frac{20}{9}$$

$$D\underline{x} = \sqrt{\frac{1}{126}(0-\frac{20}{9})^2 + \frac{20}{126}(1-\frac{20}{9})^2 + \frac{60}{126}(2-\frac{20}{9})^2 + \frac{40}{126}(3-\frac{20}{9})^2 + \frac{5}{126}(4-\frac{20}{9})^2}$$

$$= \frac{1}{9\sqrt{126}}\sqrt{20^2 + 20(9-20)^2 + 60(18-20)^2 + 40(27-20)^2 + 5(39-20)^2} =$$

$$= \frac{1}{9\sqrt{126}}\sqrt{6825} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{6825}{126}} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{325}{6}} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{1950}{36}} = \frac{\sqrt{1950}}{54} = \frac{5\sqrt{78}}{54} \approx 0.818$$

TEHTÄVÄ 56

a) Binomijakauman odotusarvo $E\underline{x} = np$ ja hajonta $D\underline{x} = \sqrt{npq}$

Tapahtuma ”arvaa oikein” toteutuu todennäköisyydellä 0.25 ja vastaus menee väärin todennäköisyydellä 0.75.

$E\underline{x} = 20 \cdot 0.25 = 5$ ja $D\underline{x} = \sqrt{20 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1.94$.

b) $P(\underline{x} > 5) = 1 - P(\underline{x} \le 5) =$

$$= 1 - P(\underline{x} = 5) + P(\underline{x} = 4) + P(\underline{x} = 3) + P(\underline{x} = 2) + P(\underline{x} = 1) + P(\underline{x} = 0) =$$

$$= 1 - \binom{20}{5} 0.25^5 \cdot 0.75^{15} + \binom{20}{4} 0.25^4 \cdot 0.75^{16} + \binom{20}{3} 0.25^3 \cdot 0.75^{17} +$$

$$+ \binom{20}{2} 0.25^2 \cdot 0.75^{18} + \binom{20}{1} 0.25^1 \cdot 0.75^{19} + 0.75^{20} =$$

$$= 1 - 0.2023311519 + 0.1896854549 + 0.1338956152 + 0.0669478076 +$$

$$+ 0.02114141293 + 0.003171211939 =$$

$$= 1 - 0.617172.... = 0.382827.... \approx 0.38$$

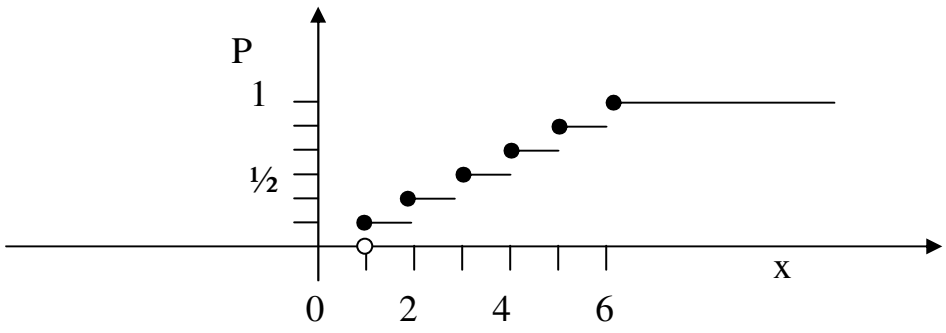
TEHTÄVÄ 57

$\underline{x} < 1 \Rightarrow F(x) = 0$, sillä P(silmäluku < 1) = 0

$1 \le \underline{x} < 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $2 \le \underline{x} < 3 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{6}$

$3 \le \underline{x} < 4 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $4 \le \underline{x} < 5 \Rightarrow F(x) = \frac{4}{6}$

$5 \le \underline{x} < 6 \Rightarrow F(x) = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\underline{x} \ge 6 \Rightarrow F(x) = 1$



TEHTÄVÄ 58

Olkoon ruutujen lukumäärä = $\underline{x}$.

$$P(\mathbf{x}=0)=\frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{2}}=\frac{575757}{2598960}=\frac{2109}{9520}\approx 0.2215$$

$$P(\underline{\mathbf{x}}=1)=\frac{\binom{39}{4}\cdot 13}{2598960}=\frac{1069263}{2598960}=\frac{82251}{199920}\approx 0.4114$$

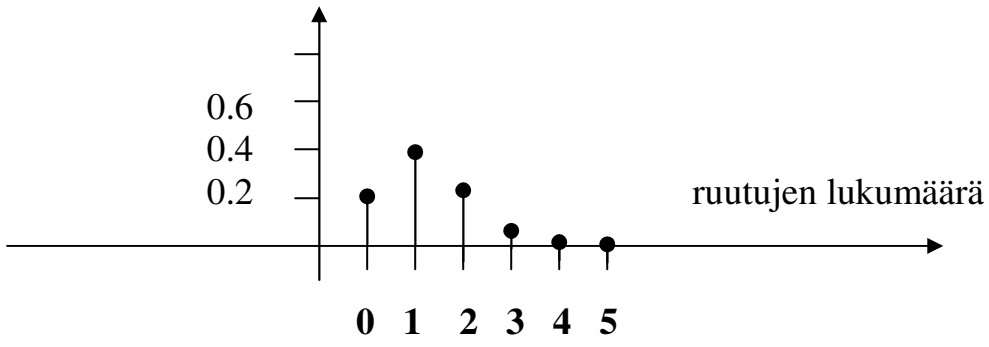
$$P(\underline{\mathbf{x}}=2)=\frac{\binom{39}{3}\cdot\binom{13}{2}}{2598960}=\frac{712842}{2598960}=\frac{9139}{33320}\approx 0.2743$$

jne..

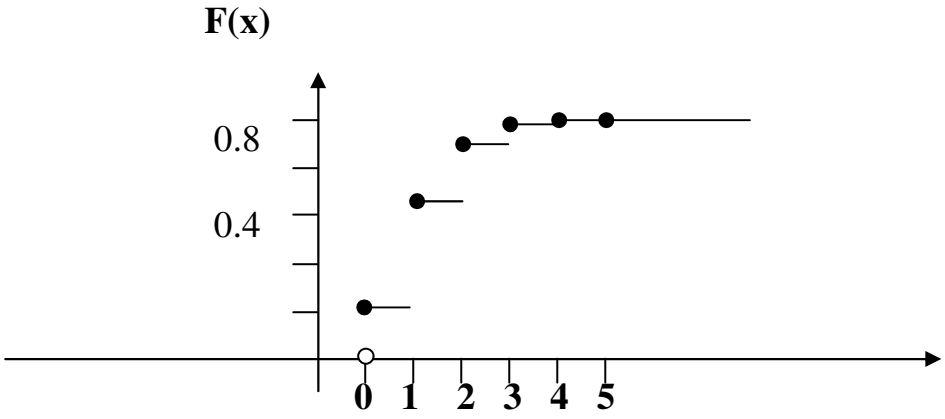
$\underline{\mathbf{x}}$	0	1	2	3	4	5
$P(\underline{\mathbf{x}})\approx$	0.2215	0.4114	0.2743	0.0815	0.01073	0.000495
ΣP	0.2215	0.6329	0.9072	0.9887	0.99944	1

Likiarvojen summa 0.999925.

Todennäköisyysjakauma janadiagrammina. Pari viimeistä janaa on käytetyssä mittakaavassa sangen lyhyitä.



Kertymäfunktion arvot saadaan yllä olevasta taulukosta alimmalta riviltä. Otetaan kuitenkin huomioon, että F(x) = 0, kun x < 0.

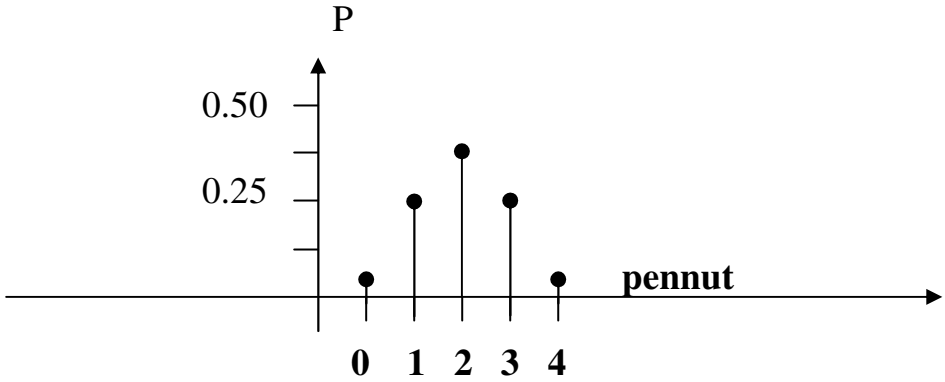


TEHTÄVÄ 59

Neljän pennun joukossa voi olla naaraita 0, 1, 2, 3, tai 4 kappaletta. Tämä on binomitodennäköisyyttä.

$$P(\underline{x}=0)=P(\underline{x}=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16} \qquad P(\underline{x}=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16}$$

$$P(\underline{x}=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16} \qquad P(\underline{x}=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$$

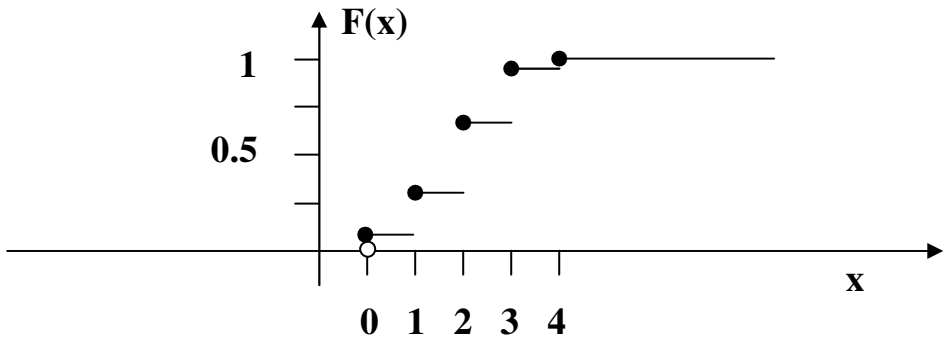


Kertymäfunktiolle: $\underline{x}<0 \Rightarrow F(x)=0$, sillä P(naaraiden määrä < 0) = 0

$$0\le\underline{x}<1 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{16} \qquad 1\le\underline{x}<2 \Rightarrow F(x)=\frac{5}{16}$$

$$2\le\underline{x}<3 \Rightarrow F(x)=\frac{11}{16} \qquad 3\le\underline{x}<4 \Rightarrow F(x)=\frac{15}{16}$$

$$\underline{x}\ge 4 \Rightarrow F(x)=1$$



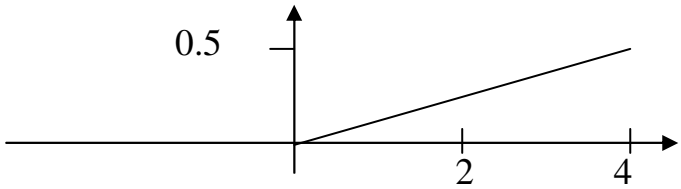
TEHTÄVÄ 60

On annettu $f(x) = \begin{cases} kx, \text{ kun } 0 \le x \le 4 \\ 0 \text{ , muulloin} \end{cases}$

a) Origosta alkava, pisteeseen (4, 4k) päättyvä suoran pätkä, jana, rajoittaa yhdessä x-akselin ja suoran x = 4 kanssa kolmion, jonka alan tulee olla yksi. Jos k > 0, jana on nouseva ja täyttää tiheysfunktion merkkikriteerin. Rajoittuvan kolmion kateetit ovat 4 ja 4k.

$A = ½ \cdot 4 \cdot 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{8}$

b)

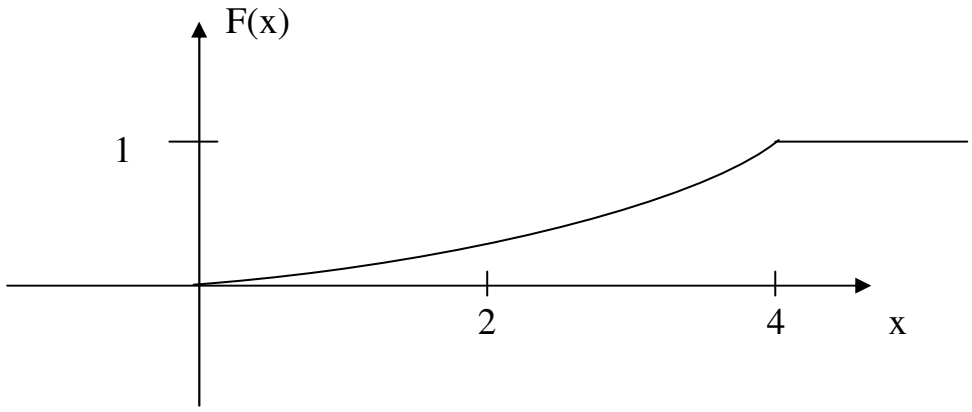


Tiheysfunktion kuvaaja yhtyy x-akseliin, kun x < 0 taikka kun x > 4.

c) Kertymäfunktio F(x) = 0, kun x ≤ 0 ja F(x) = 1, kun x > 4. Entä väli 0 … 4 ?

$F(x) = \frac{x \cdot \frac{x}{8}}{2} = \frac{x^2}{16}$

Siis $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \le 0 \\ \frac{1}{16}x^2, \text{ kun } 0 < x \le 4 \\ 1, \text{ kun } x > 4 \end{cases}$



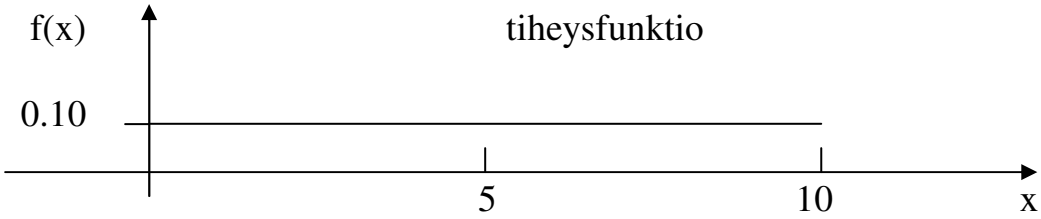
d) $P(\underline{x} < ½) = F(½) = = \frac{(½)^2}{16} = \frac{1}{64}$

$P(1 \leq \underline{x} < 3) = F(3) - F(1) = \frac{3^2}{16} - \frac{1^2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

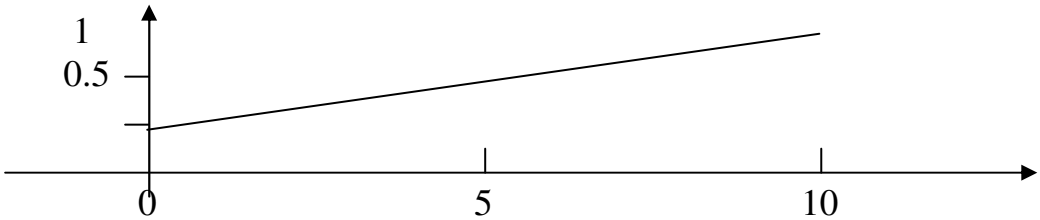
TEHTÄVÄ 61

On annettu $f(x) = \begin{cases} c, \text{ kun } 0 \leq x < 10 \\ 0, \text{ muualla} \end{cases}$

a) Tämä funktio on tiheysfunktio, jos ensiksikin c > 0 ja toisekseen toteutuu ehto $c \cdot 10 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{10}$.



b) Kertymäfunktio $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leq 0 \\ \frac{x}{10}, \text{ kun } 0 < x < 10 \\ 1, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$.



c) $P(\underline{x} \leq 3.5) = F(3.5) = 0.35$
$P(\underline{x} > 2.8) = 1 - P(x \leq 2.8) = 1\text{-}F(2.8) = 1 - 0.28 = 0.72$
$P(2.2 \leq \underline{x} < 7.7) = F(7.7) - F(2.2) = 0.77 - 0.22 = 0.55.$

TEHTÄVÄ 62

On suoraan annettu satunnaismuuttujan kertymäfunktio $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, \text{kun } x \geq 0 \\ 0 \quad , \text{kun } x < 0 \end{cases}$

a) $P(\underline{x} \leq 2) = F(2) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

b) $P(1 \leq \underline{x} < 6) = F(6) - F(1) = \dfrac{6}{6+1} - \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{6}{7} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{12}{14} - \dfrac{7}{14} = \dfrac{5}{14}$

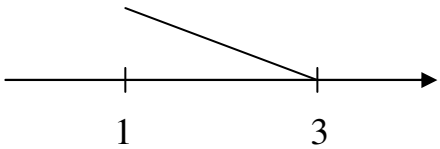
c) $P(\underline{x} > 1½) = 1 - P(x \leq 1½) = 1 - F(1½) = 1 - \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1} = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}.$

TEHTÄVÄ 63

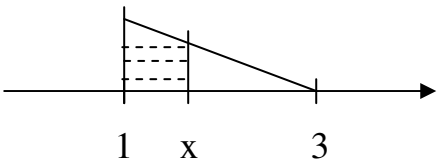
On annettu eräs funktio $f(x) = \begin{cases} kx - 3k, \text{kun} 1 \leq x < 3 \\ 0 \ , \text{muualla} \end{cases}$

$f(1) = k - 3k = -2k$
$f(3) = 3k - 3k = 0$

Funktion f kuvaaja välillä 1 … 3 on jana, jonka päätepiste on y-akselilla. Alkupisteen täytyy olla > 0, joten kertoimen k on oltava negatiivinen ja jana on siten laskevan suoran osa.



Tiheysfunktio rajoittaa x-akselin ja suoran x = 1 kanssa kolmion, jonka kateetit ovat 2 ja – 2k. On siis oltava $½ \cdot 2 \cdot (-2k) = 1 \Leftrightarrow k = -½$.



Jotta saisi kertymäfunktion selville välillä 1 … 3, tulisi pystyä laskemaan sen puolisuunnikkaan pinta-ala, jota rajoittavat suorat x = 1, x = x, x-akseli ja funktion $f(x) = kx - 3k = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} = ½(3 - x)$ kuvaaja.

Puolisuunnikkaan korkeus on x – 1 ja sen kannat, yhdensuuntaiset sivut pituudeltaan f(1) = 1 ja ½(3 1 – x).

Välillä 1 … 3 on kertymäfunktion lauseke $F(x) = \frac{\frac{2}{2} + \frac{3-x}{2}}{2} \cdot (x-1) = \frac{5-x}{4} \cdot (x-1) =$

$= \frac{5x - 5 - x^2 + x}{4} = \frac{6x - 5 - x^2}{4}$. Tämä saattaa olla oikein laskettu, koska F(1) = 0 ja F(3) = 1, kuten pitää ollakin.

$P(\underline{x} \leq 2) = F(2) = \frac{6 \cdot 2 - 5 - 2^2}{4} = \frac{3}{4}$

$P(1.4 \leq \underline{x} < 2.4) = F(2.4) - F(1.4) = \frac{6 \cdot 2.4 - 5 - 2.4^2}{4} - \frac{6 \cdot 1.4 - 5 - 1.4^2}{4} = \frac{11}{20}$

TEHTÄVÄ 64

a) $P(\underline{x} \leq 1.0) = \Phi(1) = 0.8413$
b) $P(\underline{x} > 0.6) = 1 - P(\underline{x} < 0.6) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$
c) $P(1.0 \leq \underline{x} < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(1) = 0.9332 - 0.8413 = 0.0919$

TEHTÄVÄ 65

a) $P(\underline{x} \leq x) = 0.6844 = \Phi(0.48)$, josta x = 0.48
b) $P(-x \leq \underline{x} < x) = 0.90 \Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi(-x) = 0.90 \Leftrightarrow \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 0.90 \Leftrightarrow$
$2\Phi(x) - 1 = 0.90 \Leftrightarrow \Phi(x) = 0.95$, josta $x \approx 1.65$

TEHTÄVÄ 66

a) $P(\underline{x} \leq -0.35) = P(\underline{x} > 0.35) = 1 - P(\underline{x} \leq 0.35) = 1 - \Phi(0.35) = 1 - 0.6368 = 0.3632$
b) $P(-1 \leq \underline{x} < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - 1 + \Phi(1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 =$
$= 0.6826$
c) $P(-0.50 \leq \underline{x} < 0.65) = \Phi(0.65) - \Phi(-0.50) = \Phi(0.65) - 1 + \Phi(0.50) =$
$= 0.7422 - 1 + 0.6915 = 0.4337)$

TEHTÄVÄ 67

a) $P(\underline{x} \leq x) = 0.9756 = \Phi(x)$, josta $x \approx 1.97$
b) $P(\underline{x} \leq x) = 0.9993 = \Phi(x)$, josta $x \approx 3.20$
c) $P(\underline{x} > x) = 1 - P(\underline{x} < x) = 0.5794 \Leftrightarrow P(\underline{x} < x) = 0.4206 = \Phi(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Phi(-x) = 1 - 0.4206 \Leftrightarrow \Phi(-x) = 0.5794 \Leftrightarrow -x = 0.20 \quad \Leftrightarrow x = -0.20.$

TEHTÄVÄ 68

a) $P(0.12 \leq \underline{x} < x) = 0.3332 = \Phi(x) - \Phi(0.12) \Leftrightarrow \Phi(x) - 0.5478 = 0.3332 \Leftrightarrow$
$\Phi(x) = 0.8810$, josta $x = 1.18$.
b) $P(-x \leq \underline{x} < x) = 0.50 \Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1 = 0.50 \Leftrightarrow \Phi(x) = 0.75$, josta
$x \approx 0.67$.

TEHTÄVÄ 69

a) $P(\underline{x} \leq 2) = P(\underline{z} \leq \frac{2-1}{2}) = \Phi(0.50) = 0.6915$

b) $P(\underline{x} > 0) = P(\underline{z} > \frac{0-1}{2}) = 1 - P(\underline{z} \leq -0.50 = 1 - 1 + \Phi(0.50) = 0.6915$

c) $P(0 \leq \underline{x} < 1) = P(\frac{1-1}{2} \leq \underline{z} < \frac{0.5-1}{2}) = \Phi(0) - \Phi(-0.5) = 0.5 - 1 + \Phi(0.5) =$
$= 0.6915 - 0.5 = 0.1915$

d) $P(0.50 \leq \underline{x} < 1.50) = P(\frac{1.5-1}{2} \leq \underline{z} < \frac{0.5-1}{2}) = \Phi(0.25) - \Phi(-0.25) = 2\Phi(0.25) - 1 =$
$= 2 \cdot 0.5987 - 1 = 0.1974.$

TEHTÄVÄ 70

Jakaumassa N(100,15)

a) $P(\underline{x} > 130) = 1 - P(\underline{x} \leq 130) = 1 - P(\underline{z} \leq \frac{130-100}{15}) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

b) $P(\underline{x} < 80) = P(\underline{z} \leq \frac{80-100}{15}) = \Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$

c) $P(90 \leq \underline{x} < 110) = P(\frac{90-100}{15} \underline{z} \leq \frac{110-100}{15}) = \Phi(0.67) - \Phi(-0.67) = 2\Phi(0.67) - 1 =$
$= 0.4972.$
(0.023 0.092 0.4... ; muista 4 desimaalia)

TEHTÄVÄ 71

$P(\underline{z} \le z) = 0.25 \Leftrightarrow P(\underline{z} > -z) = 0.25 \Leftrightarrow P(\underline{z} < -z) = 0.75 = \Phi(-z)$, josta

$-z = 0.68 \Leftrightarrow z = -0.68 \Leftrightarrow \frac{x-24}{6} = -0.68 \Leftrightarrow x = 19.92$

Jos pyrkijät on arvosteltu kokonaisin pistein, hyväksymisraja 20 takaa sen, että hyväksyttyjä on vähemmän kuin 75 %.

TEHTÄVÄ 72

a) $P(\underline{v} > 60) = 1 - P(\underline{v} \le 60) = 1 - P(\underline{z} \le \frac{60-66}{12}) = 1 - \Phi(-0.5) = 1 - 1 + \Phi(0.5) =$

$= 0.6915$, joten noin 69 % ajoi liika kovaa.

b) $P(\underline{v} > 75) = 1 - P(\underline{v} \le 75) = 1 - P(\underline{z} \le \frac{75-66}{12}) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266.$

Noin 23 % ylitti 75 km/h.

c) $P(\underline{v} > 85) = 1 - P(\underline{v} \le 85) = 1 - P(\underline{z} \le \frac{85-66}{12}) = 1 - \Phi(1.58) = 1 - 0.9429 = 0.0572$

Vielä lähes 6 % ylitti 85 km/h.

TEHTÄVÄ 73

$P(\underline{z} > z) = 0.96 \Leftrightarrow P(\underline{z} \le -z) = 0.96 = \Phi(-z) \Leftrightarrow -z = 1.75 \Leftrightarrow z = -1.75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a-2005}{11} = -1.75 \Leftrightarrow a = 2005 - 11 \cdot 1.75 \Leftrightarrow a = 1985.75$

Suunnilleen 96 %:ssa pusseista on ainakin 1986 g jauhoa.

TEHTÄVÄ 74

$P(\underline{z} > z) = 0.80 \Leftrightarrow P(\underline{z} \le -z) = 0.80 = \Phi(-z) \Leftrightarrow -z = 0.84 \Leftrightarrow z = -0.84 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1000-\mu}{15} = -0.84 \Leftrightarrow -\mu = -1000 - 15 \cdot 0.84 \Leftrightarrow \mu = 1012.6$

Jos gramman tarkkuuksiin mennään, parasta asettaa 1013 grammaa keskikohdaksi.

TEHTÄVÄ 75

Kun n = 30 ja p = 0.25 niin odotusarvo $\mu = np = 7.5$. Jakauman keskihajonta on

$\sqrt{30 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{3\sqrt{10}}{4} \approx 2.372.$

$P(\underline{z} > 15) = 1 - P(\underline{z} \le 15) = 1 - \Phi(\frac{15-7.5}{\frac{3\sqrt{10}}{4}}) = 1 - \Phi(\sqrt{10}) = 1 - 0.9992 = 0.0008$