1. TAUSTAA

Annetun funktion derivointikäskyn sisältö merkitykseltään tunnetaan ja jos osataan derivointisäännöt, päästään haluttuun päämäärään. Annetun funktion f **integroiminen** tarkoittaa sellaisen funktion F määrittämistä, että toteutuu ehto

$$F'(x) = f(x)$$

$$\boxed{F(x)} \quad \underset{\text{integrointi}}{\overset{\text{derivointi}}{\rightleftarrows}} \quad \boxed{f(x)}$$

"Pieni" f(x) on siis "ison" F(x):n derivaatta.

<u>Määrätty integraali</u> puolestaan on eräs raja-arvo. Se on siis puhtaasti luku, ehkä omaa jonkin dimension, mutta <u>määräämätön integraali</u> (<u>integraalifunktio</u>, anti-derivaatta) on funktio, kuten nimikin paljastaa.

MILLOIN FUNKTIO ON (EI OLE) DERIVOITUVA??

On aika tärkeää oppia tunnistamaan ne kohdat, joissa funktiolla ei ole derivaattaa. Siksi tärkeä työkalu derivaatta on. Erityisesti integraalifunktion määrittäminen saattaa mennä vikaan, ellei derivoitumisen ja jatkuvuuden välinen yhteys ole selvillä.

LAUSE 1. Jos funktio on derivoituva pisteessä x_0, niin se on tässä pisteessä varmasti jatkuva.

Tod.:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} [f'(x_0)(x - x_0)] = f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} [x - x_0] = 0.$$

Tämän nojalla on siis $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

eli funktio on jatkuva pisteessä x_0.

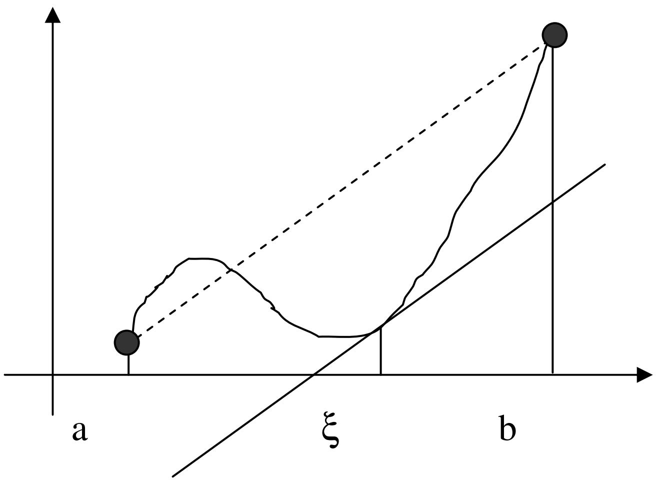
Funktiolla f ei siis missään tapauksessa ole derivaattaa kohdassa, jossa se on epäjatkuva. Toisaalta jatkuvuus ei aina ole vielä riittävä derivoituvuuden ehto. Erityisesti paloittain määritellyt jatkuvat funktiot saattavat lainvaihtumiskohdissaan olla ei-derivoituvia (kuvaajassa äkillinen suunnanmuutos, terävä kärki).

LAUSE 2. Väliarvolause.

Oletus: **1)** Funktio f on jatkuva suljetulla välillä [a,b].
2) Funktio f on derivoituva vastaavalla avoimella välillä $]a, b[$.

Väite: $\exists \xi \in]a, b[$ siten, että $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ts. avoimelta väliltä löytyy ainakin yksi sellainen piste, mihin asetettu tangentti on pisteitä (a, f(a)) ja (b, f(b)) yhdistävän jänteen suuntainen.



Tod.: Vedotaan ainoastaan kuvan mukaiseen geometriseen havaintoon. On ilmeistä, että kuvan katkoviiva on yhdensuuntainen pisteen $(\zeta, f(\zeta))$ kautta kulkevan suoran kanssa. Tämä suora on sanottuun pisteeseen asetettu käyrän tangentti. Yhdensuuntaisuus merkitsee sitä, että näillä kahdella suoralla on sama kulmakerroin.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

LAUSE 3. INTEGRAALILASKENNAN PERUSLAUSE

Oletus: Olkoon funktio f on jatkuva suljetulla välillä [a,b], derivoituva vastaavalla avoimella välillä $]a,b[$ ja olkoon lisäksi avoimen välin jokaisessa pisteessä voimassa ehto $f'(x)=0$.

Väite: f on vakiofunktio koko välillä [a,b].

Tod.: Olkoot x_1, x_2 kaksi välin [a,b] mielivaltaista pistettä, $x_1 < x_2$. Väliarvolauseen oletukset ovat voimassa ja erikoisesti f on jatkuva välillä $[x_1, x_2]$. Tällöin on olemassa avoimen välin piste ξ siten, että on voimassa myös kehitelmä

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \xi \in]x_1, x_2[.$$

Koska $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_2)=f(x_1)$, ja siten f on vakiofunktio koko välillä.