2. INTEGRAALIFUNKTIO

MÄÄRITELMÄ 1.

Jos **kaikilla** x:n arvoilla (jollakin välillä I) on voimassa ehto

$$F'(x) = f(x),$$

niin sanotaan funktiota F funktion f integraalifunktioksi.

Lyhyestä merkintätavasta huolimatta määritelmään sisältyy paljon. On siis jollain välillä olemassa derivaatta $F'(x)$, mikä merkitsee sitä, että F on varmasti **jatkuva funktio**. Tämän takia taustaosassa esiteltiin lause 1, jonka mukaan derivoituvuus takaa jatkuvuuden. Tämän asian ymmärtäminen on joidenkin tehtävien ratkaisun ydinoivallus.

Esim. 1. Osoita, että funktio G: $G(x) = 3x^2 - 4x + 5$ on funktion g: $g(x) = 6x - 4$ integraalifunktio.

Osoittaminen perustuu integraalifunktion määritelmään (1) seuraavasti:

$$G'(x) = D(3x^2 - 4x + 5) = 6x - 4$$

Huomaa, että funktiossa G vakiotermin tilalla saa olla mikä **luku** tahansa.

Palautetaan mieliin, että differentiaalilaskennan puolella on väliarvolauseeseen nojautuen ainakin mainittu - ehkäpä todistettukin - että jos funktio f on derivoituva eräällä välillä I, ja jos tämän välin jokaisessa pisteessä

$f'(x) > 0$, niin funktio f on aidosti kasvava
$f'(x) < 0$, niin funktio f on aidosti vähenevä

Edellä esitelty integraalilaskennan peruslause (lause 3) sanoo vielä sen, että jos välin I jokaisessa pisteessä

$f'(x) = 0$, niin f on vakiofunktio tällä välillä.

Integraalilaskennan peruslauseella on keskeinen merkitys, kun seuraavassa käsitellään annetun funktion integraalifunktiota koskeva lainalaisuus

LAUSE 4. Olkoon funktio F jokin funktion f integraalifunktio. Tällöin kaikki muotoa F(x) + C olevat funktiot ja vain nämä ovat funktion f integraalifunktioita.

Tod.: ”kaikki”

$D(F(x) + C) = F'(x) + 0 = f(x)$

“vain nämä”:

Olkoot F ja G kaksi funktion f integraalifunktiota. Kummankin derivaatta on funktio f. Derivoidaan erotus G(x) – F(x):

$D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

Funktio, jonka derivaatta on nolla, on integraalilaskennan peruslauseen 3. nojalla vakiofunktio. On siis kaikilla x:n arvoilla

$G(x) - F(x) = C \Leftrightarrow G(x) = F(x) + C$

Jos nyt jollakin funktiolla on yksi integraalifunktio, niin niitä on itse asiassa äärettömän monta, voihan ns. integroimisvakio C juosta läpi koko reaalilukujen joukon. Tämän vakion kiinnittäminen jostakin ehdosta onkin hyvin yleinen tehtävätyyppi tässä kohdassa integraalilaskennan teoriaa.

Esim. 2. Määritä funktion 2x – 3 integraalifunktioista se, joka kulkee pisteen (2,3) kautta.

Funktion f integraalifunktiot muodostavat ns. integraalifunktioiden parven

$$F(x) = x^2 - 3x + C$$

Parvesta on poimittava nimenomaan se integraalifunktio, joka kulkee pisteen (2,3) kautta. Sanotun pisteen koordinaatit toteuttavat integraali-funktion sisältämän yhtälön eli F(2) = 3.

$2^2 - 3 \cdot 2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 + 6 - 4 \Leftrightarrow C = 5.$

Vastaus: Kysytty integraalifunktio $F(x) = x^2 - 3x + 5$.

Annetun funktion f integraalifunktiota merkitään symbolikielellä lyhyesti

$$F(x) = \int f(x)dx\,.$$

Integraalimerkki $\int$ välittää Sinulle käskyn: Etsi sellainen funktio, jonka derivaatta on integraalimerkin ja dx:n välissä. Symboli dx merkitsee tässä sitä, että lausekkeessa muuttujana on nimenomaan x, eikä esityksessä jokin muu mahdollisesti esiintyvä (tai esiintymätön) kirjain.
Merkinnät $\int(2x+4t)dx$ ja $\int(2x+4t)dt$ on tarkoin erotettava toisistaan.

Huomaa, että voit aina derivoimalla tarkistaa, oletko suorittanut integroinnin oikein. Tärkeissä elämäntilanteissa tämä tarkistus on syytä aina suorittaa, sillä siihen ei mene kovinkaan paljon aikaa.