3. INTEGROINTI ALKEISFUNKTIOIDEN DERIVAATTOJEN AVULLA

Annetun funktion integrointi ei kaikissa tapauksissa ole kovin yksinkertaista, sillä integrointi on ehkä polynomifunktioiden parissa liikkumista yllä olevaa oleellisesti hankalampaa kuin derivointi. Esimerkiksi niinkin yksinkertaisen näköisillä funktioilla kuin $\frac{\sin x}{x}$ tai e^{x^2} on, ei tiettävästi ole lainkaan integraalifunktiota ns. alkeisfunktioiden joukossa.

Kun integroitaessa kuitenkin kuljetaan derivoinnille vastakkaiseen suuntaan ja derivointisäännöt tunnetaan (?), niin derivointikaavojen avulla saadaan suoraan kirjoitetuksi eräitä integrointisääntöjä. Näitä on luonnollisestikin kovasti koottu erinäisiin taulukoihin.

Lause 5.

(1) $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,\ r \neq -1$, muuten $r \in \mathbf{R}$.

(2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0.$

(3) $\int e^x dx = e^x + C$

(4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(8) $-\int (1 + \cot^2 x) dx = -\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C$

Näiden kaavojen oikeaksi todistaminen perustuu siihen, että derivoimalla yhtäläisyysmerkin oikealla puolella oleva funktio saadaan tulokseksi se, mikä esiintyy vasemmalla integraalimerkin ja dx:n välissä.

Todistetaan esimerkin vuoksi kaava (2):

Väite siis $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Itseisarvon määritelmän nojalla $\ln|x| = \begin{cases} \ln x\text{, kun } x > 0 \\ \ln(-x)\text{, kun } x < 0 \end{cases}$

Huomaa, nollalla ei ole logaritmia, eikä negatiivisella luvulla.

Olkoon $x > 0 \Rightarrow D(\ln x + C) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

Olkoon $x < 0 \Rightarrow D(\ln(-x) + C) = \frac{1}{-x} \cdot D(-x) + 0 = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Saattaa tuntua alkuun käsittämättömältä, miten negatiivisen luvun käänteis-arvo pystytään integroimaan ja saadaan logaritmia, kun negatiivisella luvulla ei logaritmia edes ole.

Lisäksi on syytä huomata, että jos funktiota f(x) = 1/x integroidaan jollakin välillä, niin tämä väli ei saa sisältää origoa.

Lauseen 5 sisällöillä ei vielä pärjätä edes polynomifunktion integroinnissa. Polynomihan on useimmissa tapauksissa (monomia lukuun ottamatta) summa, eikä lauseessa 5 esiinny summan integroimiskaavaa eikä myöskään sellaista kaavaa, jossa jokin x:n potenssi olisi vakiolla kerrottu. Seuraavat säännöt ovat aivan yleispätevät:

Lause 6.

(9) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

(10) $\int (f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Lauseen todistus on helppo. Riittää näyttää, että oikean puolen derivaatta on vasemmalla esiintyvä integroitava funktio. Lauseen osa (10) on tietenkin yleistettävissä useamman funktion summalle.

Huomaa, että seuraavat derivointi ja integraalioperaatioilla ”leikittelevät kaavat” eivät ole (sana)saivartelua:

$$D\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

$$\int \left[D(f(x))\right]dx = f(x) + C$$

Tutki molemmat kaavat käyttäen vaikkapa esimerkkifunktiona $f(x) = 3x^2+2x+1$.

Esim. 3. Määritä $\int (6x^3 - 8x + 2)dx$.

$$\int (6x^3 - 8x + 2)dx = \int 6x^3 dx - \int 8x dx + \int 2 dx = 6 \cdot \frac{x^4}{4} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + C =$$

$$= \frac{3}{2}x^4 - 4x^2 + 2x + C$$

Esim. 4. $\int \left(2 + \frac{3}{x}\right)^2 dx = \int \left(4 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}\right) dx = C + 4x + 12\ln|x| - \frac{9}{x}$.

Esim. 5. $\int (2\tan^2 x)dx = \int (2 + 2\tan^2 x - 2)dx = 2\int (1 + \tan^2 x)dx + \int (-2)dx =$

$= 2\tan x - 2 + C$.

Varoitus: Esitetyn lauseet eivät puhu mitään usean funktion tulon (funktion potenssin) tai osamäärän integroinnista. **EI SIIS OLE**

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx = F(x) \cdot G(x) + C \quad \text{eikä}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{F(x)}{G(x)} + C \quad \text{eikä myöskään}$$

$$\int [f(x)]^r dx = \frac{[F(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Jos yllä olevaa tarjoat, et pisteitä saa.