4. YHDISTETYN FUNKTION DERIVAATTAAN PERUSTUVA INTEGROINTI

Luvussa 3. esitetyt integroimiskaavat pätevät vain niissä puitteissa kuin niiden sisältö ja sisäinen olemus ilmentää. Edellisellä sivulla esitettyyn varoitukseen on syytä suhtautua vakavasti. Esimerkiksi funktio f: $f(x) = (2x^2 - x - 5)^3$ on integroitavissa vasta, kun sulkulauseke on saatettu polynomiksi; kolmanteen potenssiin korotus on siis suoritettava ensin. Mikä on sitten syy siihen, että hieman erilainen funktio g: $g(x) = (4x - 1) \cdot (2x^2 - x - 5)^3$ olisi muka integroitavissa, mutta taas funktio h: $h(x) = (4x - 2) \cdot (2x^2 - x - 5)^3$ ei kovin helposti ole?
Selitys tähän löytyy derivointikaavasta $D\left[(f(x))^n\right] = n \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^{n-1}$.
Kyseessä on yhdistetyn funktion derivoinnin eräs erityistapaus. Yllä on funktiossa g binomi 4x – 1, ja vain se ”kantalukuna” olevan trinomin $2x^2 - x - 5$, sisäfunktion derivaatta. Niinpä on, kuten derivoiden saatat todeta
$\int (4x-1) \cdot (2x^2 - x - 5)^3 dx = \frac{1}{4}\left(2x^2 - x - 5\right)^4 + C$.
Jos siis integroitava funktio joko suoraan on tai voidaan integrointikaavaa (9) käyttäen mukavasti yhdistetyn funktion derivaataksi, niin integrointi on vaivatta (?) suoritettavissa.

****

Lause 7. Olkoon G funktion g integraalifunktio ja olkoon f jatkuvasti derivoituva. Tällöin

$$\int g[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = G[f(x)] + C \qquad (11)$$

Tod.: $D[(G \circ f)(x) + C] = D[G(f(x)] + 0 = G'[f(x)] \cdot f'(x) = f'(x) \cdot g[f(x)]$.

****

Esitetyn lauseen sisältö saattaa aluksi vaikuttaa kovinkin hieroglyfimäiseltä, mutta sen asiasisältöön käytännön integraaleissa äkkiä rutinoituu, jos katsoo asian sen arvoiseksi. On siis motivaatiosta kyse. Jos integroitava funktio voidaan kirjoittaa erään yhdistetyn funktion ja tämän sisäfunktion derivaatan tuloksi, niin integrointi sujuu syvää sisäistä iloa tuntien. Jos erikoisesti sisäfunktio on ensiasteinen polynomi, sen derivaatta on vakio. Tällöin pystytään sisäfunktion derivaatta konstruoimaan integraalimerkin sisään kaavan (9) avulla käyttäen ovelalla tavalla hyväksi ykkösellä kertomista, kuten myöhemmin esitettävistä esimerkeistä näkyy.

Lauseesta 7. saadaan sen erikoistapauksena

****

Seurauslause 7.1.

(12) $\int f'(x)\cdot[f(x)]^r\,dx = \dfrac{[f(x)]^{r+1}}{r+1}+C,\ r\neq -1,\ r\in \mathbf{R}$

(13) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

(14) $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+C$

****

Esim. 6.

$$\int 12x^2(x^3+3)^3dx = 4\int 3x^2(x^3+3)^3dx = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(x^3+3)^4+C =$$
$$=(x^3+3)^4+C$$

Esim. 7. $\int x^2\cdot\sqrt[3]{x^3+3}\,dx = \int x^2(x^3+3)^{1/3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+3)^{1/3}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+3)^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}+C = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot(x^3+3)^{\frac{4}{3}}+C.$$
$$=\frac{1}{4}(x^3+3)\sqrt[3]{x^3+3}+C$$

Esim. 8. $\int\dfrac{4x\,dx}{x^2+4} = 2\int\dfrac{2x\,dx}{x^2+4} = 2\ln\left|x^2+1\right|+C = \ln(x^2+4)^2+C.$

Tuloksessa ei tarvita nyt itseisarvoa, kuten kaava (13) edellyttää, koskapa $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ aina. Logaritmin tai potenssin logaritmisääntöä takaperin soveltaen ei logaritmin tai neliöjuuren sisäfunktio ole koskaan ei-positiivinen. Itseisarvon merkitseminen sievennyksen yhteen välimuotoon on sinänsä aivan paikallaan.

Esim. 9. $\int\dfrac{dx}{4x-6} = \dfrac{1}{4}\int\dfrac{4dx}{4x-6} = \dfrac{\ln|4x-6|}{4}+C.$

Itseisarvon käyttö on nyt ehdottoman välttämätön asia. Kun syvemmin pureudut integrointiin, huomaat heti, että tämä tulos on voimassa vain sellaisilla **R**:n osaväleillä, jotka eivät sisällä pistettä x = 1½. Tässä pisteessä ei sen paremmin integroitava funktio kuin integraali-funktiokaan ole edes määritelty.

Esim. 10. $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C.$

Esim. 11. $\int \sin(\frac{x+13}{2}) \, dx = 2\int \frac{1}{2}\sin(\frac{x+13}{2})dx = -2\cos(\frac{x+13}{2}) + C.$

Esim. 12. $\int 4xe^{4x^2} dx = \frac{1}{2}\int 8xe^{4x^2} dx = \frac{e^{4x^2}}{2} + C.$

Esim. 13. $\int \sin x \cos^6 x \, dx = -\int - \sin x \cos^6 x) dx = -\frac{\cos^7 x}{7} + C.$

Esim. 14. $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int (\ln x)^3 D(\ln x) dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + C, \; x > 0.$

Esim. 15. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x} D(\ln x) dx = \ln|\ln x| + C, \; x > 0.$

Perehtymällä esitettyihin esimerkkeihin huomaat varmasti, kuinka tärkeää integroinnin sujumisen kannalta on derivointisääntöjen hyvä hallinta.