5. OSITTAISINTEGROINTI

Kahden funktion f ja g tulo derivoidaan – kuten muistetaan – seuraavasti:

$$D(fg) = f'g + fg'.$$

Kun tämä yhtälö integroidaan puolittain, niin saadaan

$$fg = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx .$$

Yhtälö saattaa erota puolikkailtaan vakiolla, mutta jos katsotaan integroimisvakion olevan vielä kätkettynä oikealla puolella oleviin määräämättömiin integraaleihin, ja kun saatua tulosta hiukan terminsiirroin muokataan, saadaan **osittaisintegrointia** koskeva melko tärkeä

****

LAUSE 8.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

****

Huomaa: on ihan sama, kumman oikean puolen integraaleista vasemmalle siirtää.

Osittaisintegrointia pannaan tyrkylle, jos tyyppiä fg´ olevaa integraalia (KAAVAN VASEN PUOLI) ei kyetä mitenkään määrittämään, mutta funktio g löydetään. Helpoin tapaus on luonnollisesti se jatko, missä f ´g pystytään heti integroimaan. Jatko-opinnoissa ei ole mitenkään tavatonta, että joutuu kahdesti, jopa useampia kertoja soveltamaan osittaisintegrointia peräkkäin samassakin tehtävässä. Tulee myös tilanteita, joissa sovellettuaan kahdesti osittaisintegrointia pääsee yhtälöön, josta alkuperäisen integraalin voi sitten ratkaista.

On heti sanottava, ettei osittaisintegrointi ole mikään viimeinen ja korkein valttikortti, joka varmasti vie päämäärään, ellei mikään muu keino ole auttanut. Integroitavan funktion muotokin usein paljastaa, kannattaako osittaisintegrointia edes yrittää. Onhan tällöin oltava integraalimerkin ja dx:n välissä kahden funktion tulo (joskus toinen tekijä voi olla pelkkä ykkönen!!). Kun osittaisintegrointia käyttää, on syytä olla erittäin huolellinen merkinnöissään, jotta varmasti on selvillä, mikä on f, mikä f ´, mikä on g ja mikä g´, ja että sijoittaa nämä kaikki lauseen 8. mukaiseen kaavaan ehdottomasti oikein. Tällöin ei sovi olla etumerkeissäkään kovin huolimaton. Tehtävää suorittaessaan on syytä kirjoittaa osittaisintegroinnin kaava näkyviin ja tämän lisäksi kaikki neljä funktiotakin.

Esim. 16. Määritä $\int(3x^2+2x)\ln x\,dx$.

Hetimiten nähdään, että integroitavana on kahden funktion tulo ja näistä toinen on valittava f:ksi ja toinen ”g-pilkuksi”. Tässä esimerkissä valintaa helpottaa olennaisesti se tieto, että polynomiosa kyetään sekä derivoimaan että integroimaan, mutta luonnollinen logaritmi tuntuisi olevan vain derivoitavissa, joten luontevinta on yrittää valita f(x) = ln x. Kirjoitetaan kaikki neljä funktiota nyt näkyviin:

$f(x)=\ln x$ $\qquad g'(x)=3x^2+2x$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x)=x^3+x^2$

Sijoittamalla nämä nyt osittaisintegroinnin kaavaan

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

saadaan

$$\begin{aligned}\int(3x^2+2x)\ln x\,dx &= (x^3+x^2)\ln x-\int\frac{1}{x}(x^3+x^2)dx=\\ &=(x^3+x^2)\ln x-\int(x^2+x)dx=\\ &=(x^3+x^2)\ln x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C\end{aligned}$$

Esim. 17. Määritä $\int x^3e^{3x}dx$.

Integroitava funktio on jälleen kahden funktion tulo, joista kumpainenkin kyetään sekä derivoimaan, että integroimaan. Voidaan siis valita väärinkin ja joudutaan sitä tehden umpikujaan. Kun eksponenttifunktion esitys ei paljon muutu tekee sille kumpaa toimenpidettä tahansa, niin polynomi-osuudesta tiedetään, että jos sitä ryhtyy integroimaan, niin asteluku vain nousee. Näin ajatellen olisi eksponenttifunktiolle tarjottava integrointia ja polynomille (monomille) derivointia. Valitaan

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $g'(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 3x^2$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

Sijoittamalla nämä taasen osittaisintegroinnin kaavaan

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

saadaan

$$\int x^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}x^3 - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}x^3 - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3x^2 dx = = \frac{1}{3}e^{3x}x^3 - \int x^2 e^{3x} dx$$

Sovelletaan oikealla puolella olevaan integraaliin uudelleen osittaisintegrointia ja valitaan siellä

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $g'(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 2x$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

Kun nämä, erityistä huolellisuutta ja tarkkaavaisuutta noudattaen, kokonaisuus huomioon ottaen sijoitetaan, niin jatkuu suoritus seuraavasti:

$$\int x^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}x^3 - \int x^2 e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}x^3 - \left[\frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \int \frac{2}{3}xe^{3x} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}x^3 - \frac{1}{3}e^{3x}x^2 + \int \frac{2}{3}xe^{3x} dx$$

Sovelletaan vielä kerran osittaisintegrointia oikealla puolella edelleen pysyttelevään, joskin hieman muotoaan muuttaneeseen integraaliin ja valitaan

$f(x)=\frac{2}{3}x \qquad g'(x)=e^{3x}$

$f'(x)=\frac{2}{3} \qquad g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$

Ja vielä yhdesti sijoitetaan:

$$\int x^3e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}x^3-\frac{1}{3}e^{3x}x^2+\int\frac{2}{3}xe^{3x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}x^3-\frac{1}{3}e^{3x}x^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}x^3-\frac{1}{3}e^{3x}x^2+\frac{2}{9}e^{3x}-\int\frac{2}{9}e^{3x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}x^3-\frac{1}{3}e^{3x}x^2+\frac{2}{9}xe^{3x}-\frac{2}{27}e^{3x}+C=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\left[x^3-x^2+\frac{2x}{3}-\frac{2}{9}\right]+C$$

Esim. 18. Määritä $\int\ln x dx$.

Edellä vihjattiin sellaiseen osittaisintegroinnin käyttömahdollisuuteen, missä integroitava olisi kahden funktion tulo ja toinen tulontekijä olisi ykkönen. Tätä ei varmaan ole alkuun helppo huomata siitäkään huolimatta, että ykkönen on helppo integroida. Kirjoitetaan siis integroitava funktio muotoon $1\cdot\ln x$, ja kun ln x nyt on integroitavana, niin ellei sitä kyetä suoraan integroimaan, ei sitä kannata osittaisintegrointia soveltaessaan valita minkään funktion derivaataksi. Sijoitetaan siis kaavaan

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$f(x)=\ln x \qquad g'(x)=1$

$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x$

$$\int\ln x dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C.$$

Esim. 19. Määritä $\int e^{x}\sin x dx$.

Valitaan

$f(x)=e^{x}$ $\quad g'(x)=\sin x$

$f'(x)=e^{x}$ $\quad g(x)=-\cos x$

jolloin

$$\int e^{x}\sin x dx=-e^{x}\cos x-\int -e^{x}\cos x dx=-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos x dx.$$

Jatketaan soveltaen osittaisintegrointia ja valitaan

$f(x)=e^{x}$ $\quad g'(x)=\cos x$

$f'(x)=e^{x}$ $\quad g(x)=\sin x$

Tällöin

$$\begin{aligned}\int e^{x}\sin x dx &=-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos x dx=\\ &=-e^{x}\cos x+\left[e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin x dx\right]=\\ &==-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin x dx\end{aligned}$$

Viimeksi kirjoitetussa yhtälössä sen molemmilla puolilla esiintyy se integraali, jota kovin kaivataan. Se voidaan yhtälöstä nyt ratkaista pitäen sitä kokonaisuutena tuntemattomana:

$$\int e^{x}\sin x dx=-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin x dx \Leftrightarrow$$

$$2\int e^{x}\sin x dx=-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x+C_1$$

$$\int e^{x}\sin x dx=\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2}+C$$

Kuten lienet huomannut, kirjoitettaessa näkyviin kaavaan sijoitettavaa funktiota g(x), siihen kuuluvaa integroimisvakiota ei ole kirjoitettu näkyviin ennen kuin vasta loppuvaiheessa. Missään tapauksessa ei tule sijoittaa fg:hen f(g + C) ellei sijoita funktiota g + C myös oikealla puolella olevaan määräämättömään integraaliin. Jos haluat, niin tutki asia jollakin yksinkertaisella esimerkkifunktiolla, vaikkapa jo jollakin edessä ratkaistuista esimerkeistä valiten, niin tulet huomaamaan, että kyseessä on nollan lisääminen muodossa, joka on virhelähteenä varsin antoisa.

Riittää, että lopputulokseen muistaa integroimisvakion kirjoittaa, siis vaiheessa, jossa viimeisestäkin integraalista oikealla puolella eroon pääsee.