6*. MURTOFUNKTION INTEGROINTI

Murtofunktio tarkoittaa kahden polynomin osamäärää, ja sen yleinen muoto on

$$R : R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Mikäli osoittajapolynomin asteluku on nimittäjäpolynomin astelukua korkeampi tai molemmat samanasteiset, niin R voidaan aina esittää muodossa

$$R : R(x) = G(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

missä G on polynomifunktio (tai vakio) ja S(x):n asteluku on pienempi kuin Q(x):n asteluku. Yllä oleva muunnos on hyvin analoginen seuraavan murtolukumuokkauksen kanssa $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$. Uudeksi ongelmaksi havaitaankin nyt sellaisen murtofunktion integrointi, jossa osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä, eikä osoittajapolynomi ole nimittäjäpolynomin derivaatta, eikä sitä vakiolla kertomallakaan sellaiseksi saada.

Mikäli R(x) on sellainen funktio, että P(x):n asteluku on Q(x):n astelukua alhaisempi, ollaan heti tämän uuden asian edessä. Jos tilanne ei astelukujen suhteen olekaan tämä, niin tullaan suorittamalla osoittajan jako nimittäjällä jo esitettyyn muotoon

$$R : R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

jota lähellä on myös alkeismatematiikasta tuttu sääntö: jaettava = jakaja kertaa osamäärä + jakojäännös:

$$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow 17 = 3 \cdot 5 + 2.$$

Mikäli Q(x):n asteluku on yksi, osoittautuu integrointi sujuvan esitetyn muokkauksen jälkeen vielä suhteellisen helposti.

Esim. 20. Määritä $\int \frac{2x^2 + 3x}{x + 1} dx$.

Jos jaetaan osoittaja nimittäjällä, niin saadaan

$\frac{2x^2 + 3x}{x + 1} = 2x + 1 - \frac{1}{x + 1}$ (osaatkos jakaa polynomin polynomilla jakokulmassa??).

Niinpä on

$$\int \frac{2x^2+3x}{x+1}dx = \int (2x+1-\frac{1}{x+1})dx = x^2+x-\ln|x+1|+C,\ x \neq -1.$$

Rationaalifunktion R(x) nimittäjä ei luonnollisesti aina ole ensiasteinen. Korkeamman asteen yhtälöiden teorian nojalla tiedetään, että tällainen polynomi voidaan toisinaan jakaa alempiasteisiin tekijöihin. Mikäli liikutaan reaalilukujen joukossa, polynomin tekijät ovat ensiasteisia tai sitten toista astetta, joskaan tätä tekijöihin jakoa ei ole helppo aina suorittaa. Käsiteltävien asioiden tässä vaiheessa ei kuitenkaan aseteta suurta painoarvoa sille, että tekijöihin jako muodostaisi tehtäväratkaisussa suurimman työmäärän. Jos polynomin Q(x) kaikki tekijät ovat ensiasteisia, saadaan esitys

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

Pääpiirteissään tekijöihin jaon jälkeisessä toiminnassa on kyse $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ tyyppisten murtolukujen summan yhteenlaskettavien etsimisestä. Kun on laskettu yhteen kaksi sellaista rationaalilauseketta, joiden nimittäjät ovat keskenään jaottomia ensiasteisia polynomeja, on saatu tulokseksi rationaalilauseke, jonka nimittäjä on yhteenlaskettavien lausekkeiden nimittäjäpolynomien tulo:

$$\frac{A}{x^2+px+q} = \frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2},$$

missä x_1 ja x_2 ovat yhtälön $x^2+px+q=0$ juuret.

Mikäli osa Q(x):n tekijöistä on toista astetta, pyritään summaksi hajottamisessa siihen, että toisen asteen nimittäjän omaavan termin osoittaja olisi ensiasteinen polynomi ja tietenkin (?) nimittäjäpolynomin derivaatta.

Kuvattua menetelmää nimitetään **osamurtoihin jaoksi.**

Esim. 21. Määritä $\int \frac{dx}{x^2-3x}$.

Melko vaivatta osataan jakaa nimittäjä tekijöihin, onhan sen termeillä yhteinen tekijä x. Pyritään lausumaan siis integroitava lauseke kahden murtolausekkeen summana. Yhteenlaskettavien lausekkeiden nimittäjät ovat siis x ja x – 3: $\frac{1}{x^2-3x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x}$.

Suoritetaan viimeisessä muodossa oikealla esiintyvä yhteenlasku:

$$\frac{1}{x^2-3x}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x}=\frac{Ax}{x(x-3)}+\frac{B(x-3)}{x(x-3)}=\frac{Ax+Bx-3B}{x^2-3x}=$$
$$=\frac{(A+B)x-3B}{x^2-3x}.$$

On siis saatu vastaavuus

$$\frac{1}{x^2-3x}=\frac{(A+B)x-3B}{x^2-3x}$$

Näiden lausekkeiden on oltava identtisesti samat x:n arvosta riippumatta, joten vastaavan korkuisten termien kertoimien tulee kumpaisenkin lausekkeen osoittajassa olla samat. Vasemman puoleisen lausekkeen osoittajan voidaan ajatella olevan 0x + 1, joten vertaamalla vastaavan korkuisten termien kertoimia tullaan yhtälöpariin

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{1}{3} \\ A=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Siispä lopulta on

$$\int\frac{dx}{x^2-3x}=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{3}}{x}\right)dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{dx}{x-3}-\frac{dx}{x}\right)=\frac{1}{3}(\ln|x-3|-\ln|x|)+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C=\ln\sqrt[3]{\left|\frac{x-3}{x}\right|}+C.$$

Esim. 22. Määritä $\int\frac{dx}{x(x-1)^2}$.

Tässä tapauksessa nimittäjällä on yksinkertaisen nollakohdan x = 0 lisäksi ns. kaksinkertainen nollakohta x = 1. Tällöin osamurtokehitelmä on

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

missä keskimmäisen termin jättää helposti pois. Suoritetaanpa taas oikealla puolella yhteenlaskua:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2(A+B) - x(2A+B-C) + A}{x(x-1)^2}$$

Kertoimien vertaaminen johtaa yhtälöryhmään, joka ratkaistaan:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B - C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Kokeilepa ihan mielenkiinnosta, mitä seuraa, jos tarjoat osamurto-kehitelmää muodossa $\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2}\right) dx$. Samalla huomaat, kuinka tärkeää on tiedostaa, mistä kaikista yhteenlaskettavista jokin summa voi muodostua.

Esim. 23. Määritä $\int \frac{x+3}{x(x^2+x+1)} dx.$

Nimittäjässä oleva toisen asteen tekijä on jaoton polynomi. Osamurtokehitelmä on nyt muotoa

$$\frac{x+3}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Suorittamalla oikealla puolella oleva yhteenlasku saadaan jälleen kolmen yhtälön ryhmästä A = 3, B = −3 ja C = −2 ja siten

$$\int \frac{x+3}{x(x^2+x+1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\right) dx = \int \frac{3dx}{x} - \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+5}\,dx =$$

Ja taidetaan olla umpikujassa.

Huomautus: $x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$

Käytännössä ei ole kovin tavallista, että nimittäjäpolynomin jonkin tekijän ollessa jaoton toisen asteen trinomi, saataisiin osamurtokehitelmään termi, jossa tällainen trinomi on nimittäjässä ja osoittajaan tulee sen derivaatta. Osoittajaan voidaan kyllä sellainen pystyyn rakentaa, mutta tällöin joudutaan tilanteeseen, jossa on joka tapauksessa integroitava murtofunktio, jonka osoittaja on vakio ja nimittäjä toista astetta. Tällaisen integroiminen vaatii pitkän matematiikan pakollisiin kursseihin kuulumattomien arkusfunktioiden hallintaa. Nämä ovat trigonometristen funktioiden käänteisfunktioita, joskin siitä mukavia, että niiden derivaatat ovat algebrallisia funktioita.

Tässä yhteydessä voi olla hyödyllistä palauttaa mieliin, että vain bijektiivisillä kuvauksilla ts. koko määritysjoukossaan aidosti monotonisilla funktioilla on käänteisfunktio, eivätkä trigonometriset funktiot suinkaan sanottua monotonisuus-ehtoa täytä. Näille löydetään kylläkin yhden jakson mittaiset monotoniset rajoittumat (sinille suljettu väli $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ja tangentille vastaava avoin väli), joiden arvojoukoissa vastaavat käänteisfunktiot ovat määritellyt. Sinin käänteisfunktiolle tämä väli on [-1, 1] ja tangentin käänteisfunktiolle se on koko reaalilukujen joukko **R**. Näiden derivaatat ovat

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ja } D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Näistä derivaatoista nimenomaan jälkimmäistä, tan x:n käänteisfunktion derivaattaa tarvitaan osamurtoihin jaon niissä tapauksissa, jotka johtavat sellaisten rationaalifunktioiden integrointiin, joissa nimittäjään jää jaoton toisen asteen polynomi.