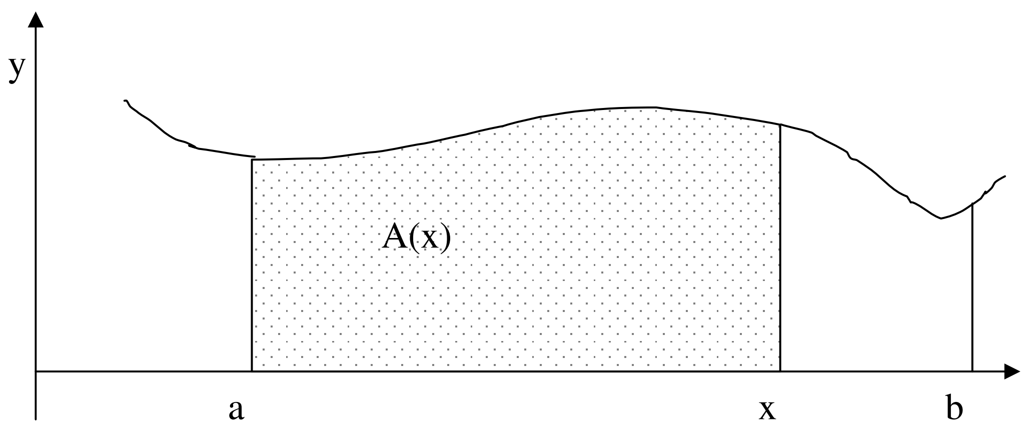
7. PINTA-ALAFUNKTIO

Edellä on käsitelty annetun funktion **integraalifunktion** määrittämiseen liittyviä asioita kurssille asetettuja vaatimuksia jonkin verran ylittäenkin. Johdanto-osassa muistanet mainitun, että integraalilaskennan toinen peruskäsite, **määrätty integraali**, on eräs raja-arvo, mutta ennen kuin käydään selvittämään, mikä raja-arvo on kyseessä, miten se käytännössä määritetään ja mitä hyötytietoa tämän raja-arvon avulla kenties saadaan, tarkastellaan ns. pinta-alafunktiota, koska jo tämän käsitteen yhteydessä selviää se ajatuslogiikka, joka sitten laajemmin ja syvemmin toistuu määrätyn integraalin yleisteoreettisessa käsittelyssä.

Tässä yhteydessä lienee syytä huomauttaa, että lukiomatematiikassa olisi syytä korostaa muitakin seikkoja kuin pinta-alan määrittämistä, koska opiskelijoille saattaa pitkäksi ajaksi jäädä käsitys, että määrättyä integraalia voidaan enimmäkseen soveltaa vain pinta-alojen laskussa. Ken taas ei opiskele fysiikkaa, jää paljossa vaille niitä näköaloja, joita fysiikka tarjoaa määrätyn integraalin soveltamiseen.

No, olkoon nyt A(x) sen pinnan ala, jota rajoittavat x-akseli, ei-negatiivisen funktion f kuvaaja ja kaksi y-akselin suuntaista suoraa paikoissa a ja x, missä $x > a$. Funktiota A, jonka arvo on siis muuttujasta x riippuvainen, sanotaan (jatkuvan) funktion f pinta-alafunktioksi.

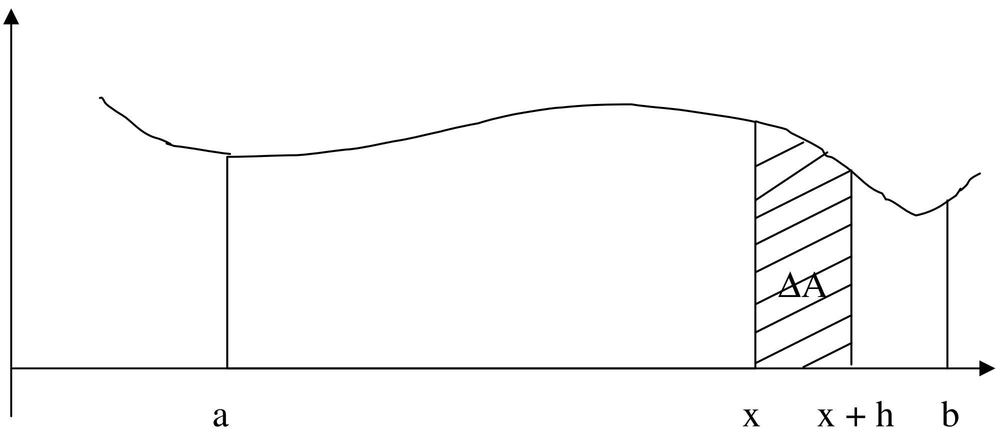
Pyritään määrittämään pinta-ala A(x) – ei suoraan – vaan siten, että **muodostetaan funktion A derivaatta A´(x).** Jos derivaatan määrittäminen onnistuu, ehkä päästään integroimalla määrittämään itse funktion A arvo kohdassa x (ja myös kohdassa b).



Funktion derivaatta on määritelmänsä mukaan erotusosamäärän raja-arvo, missä riippumattoman muuttujan lisäys lähenee rajattomasti nollaa. Tässä ei tietenkään löydy mitään valmista derivointikaavaa, vaan on käytettävä määritelmää suoraan. Erotusosamäärähän merkitsee sitä, että oltaessa paikassa x annetaan x:lle pieni lisäys h = Δx, ja katsotaan, mikä on vastaava funktion lisäys ΔA. Muodostetaan sitten funktion lisäyksen ja x:n lisäyksen suhde (ΔA)/(Δx) = (ΔA)/h, ja otetaan siitä raja-arvo, kun $h \to 0$. Toivottavasti tämä raja-arvo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$ on olemassa.

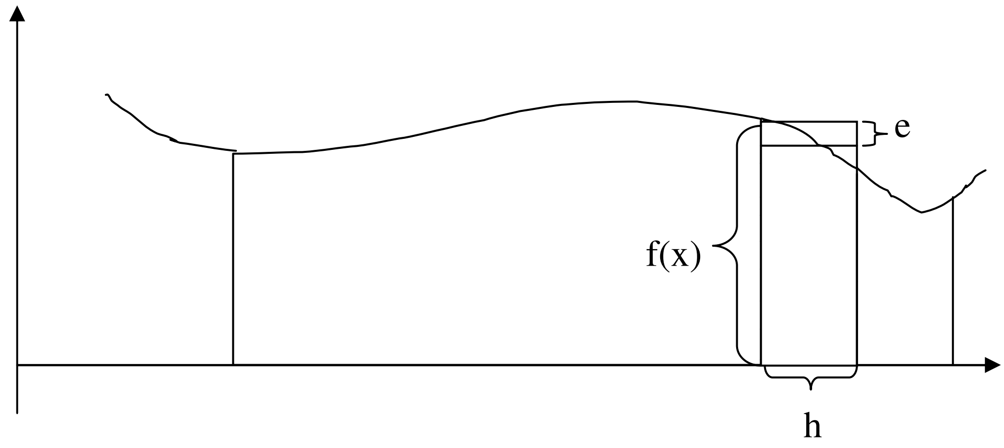
Merkintä A(x + h) tarkoittaa luonnollisesti sen pinnan alaa, jota oikealla rajoittaa y-akselin suuntainen suora paikassa x + h, mutta muilla ilmansuunnilla tämä pinta on yhteinen pinnan A(x) kanssa. Jos h > 0, pinta A(x + h) sisältää kokonaan pinnan A(x), mutta jos h < 0, on tilanne päinvastainen. Erotusosamäärän osoittajassa olevaa lauseketta A(x + h) – A(x) on merkitty symbolilla ΔA = alla olevassa kuviossa oleva viivattu kaistale.



Tässä on nyt oletettu, että muuttujan x saama lisäys on positiivinen, ja viedään tarkastelu loppuun olettaen näin. Tällöin, mikäli erotusosamäärän raja-arvo kyetään määrittämään, kyseessä on vain sen oikeanpuoleinen raja-arvo, eli funktion A(x) oikeanpuoleinen derivaatta. Vasemmanpuoleisen derivaatan johto ei kovin monimutkaisia lisätarkasteluja vaatisi.

Jaetaan ΔA kahteen osaan. Piirroksessa funktio f on vähenevä kohdassa x, joten jos piirretään pisteen (x, f(x)) kautta vaakasuora viiva ja jatketaan viivaa kohdassa x + h siten, että syntyy suorakulmio, jonka korkeus on f(x), niin näin syntyneen

suorakulmion ala = h·f(x) on suurempi kuin ΔA.



Edellissivun kolmiomainenkin osa muunnetaan suorakulmioksi, jonka kanta on h ja se on melko matala (katso kuviota), merkitään korkeutta vaikkapa symbolilla e. Sen pinta-ala on siis yhtä suuri, mitä lausekkeessa $h \cdot f(x)$ on liikaa, jotta se esittäisi täsmälleen funktion A saamaa lisäystä ΔA, joka voidaan nyt esittää näiden kahden suorakulmion alojen erotuksena: $\Delta A = h \cdot f(x) - e \cdot h$. Silloin erotusosamäärääkin voidaan muokata:

$$\frac{\Delta A}{h} = \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{h \cdot f(x) - e \cdot h}{h} = f(x) - e.$$

Jos funktio f on kasvava kohdassa x, niin erotusosamäärä on suorakulmion ja kolmiomaisen (tämä on nyt vähän kaunisteltua oletusta) osan summa, ja selvitään sillä, että pidetään yllä olevassa lausekkeessa lukua e positiivisena. Kun nyt derivaattaa kuitenkin loppujen lopuksi haetaan, niin on otettava erotusosamäärästä raja-arvo, missä h lähestyy nollaa. Tällöin on varsin ilmeistä, että myös luku e lähestyy rajattomasti nollaa, käyhän alan lisäystä ΔA kuvaava kaistale lopulta äärettömän kapeaksi.

Jos nyt on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x),$$

niin sama raja-arvo toisin kirjoitettuna on

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{e \to 0} (f(x) - e) = f(x) \text{ !!!}$$

ja kun nämä molemmat raja-arvot kuvaavat samaa asiaa, niin on saatu aluksi ehkä ylen merkilliseltä vaikuttava tulos

$$A'(x) = f(x)$$

Pinta-alafunktion A derivaatta pisteessä x saa siis saman arvon, kuin pintaa ylhäältä rajoittava funktio samassa pisteessä x. Funktion pinta-alafunktio on siten saman funktion integraalifunktio. Jos löydetään yksikin funktion f integraalifunktio F, niin kaikki integraalifunktiot löytyvät parvesta F(x) + C ja tällöin **A(x) on yksi näistä**, mutta mikä?

$$A(x) = F(x) + C$$

Mikä on C?

Tämän selvittämiseksi voidaan kysyä, mitä on A(a), eli mikä on sellaisen pinnan ala, jolla on korkeus f(a), mutta joka leveydeltään on nolla? Kyseessä on siis pinta, jota rajoittavat x-akseli, ei-negatiivisen funktion f kuvaaja ja sivusuunnassa kaksi päällekkäin olevaa y-akselin suuntaista suoraa. Vastattaessa esitettyyn ongelmaan on kai tultava siihen sinänsä triviaaliin tulokseen, että A(a) = 0, mutta voi olla ihmeellistä kytkeä se tässä yhteydessä erään tärkeän integroimisvakion määrittämiseen. Siis

$$0 = A(a) = F(a) + C \iff C = -F(a), \text{ joten}$$

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Pinta-alan laskeminen sanotuin lähtökohdin palautuu siis siihen, että lasketaan ei-negatiivisen funktion f jonkin integraalifunktion kahden arvon erotus. Yleensä tehtävänanto on sellainen, että tahdotaan tietää sen pinnan ala A, jota rajoittavat x-akseli, y-akselin suuntaiset suorat x = a ja x = b (b > a) sekä välillä [a,b] jatkuvan ei-negatiivisen funktion f kuvaaja. Tällöin todellakin **on kyseessä pinta-alafunktion arvo pisteessä b:**

$$A(b) = F(b) - F(a).$$

Integraalifunktion arvo lasketaan siis siinä pisteessä, mihin ala oikealla päättyy ja toisaalta lasketaan siinä pisteessä, mistä ala alkaa ja vähennetään näin saadut luvut toisistaan (tässä on oltava sikatarkkana etumerkkien kanssa!!). Historiallisistako syistä, vai mistä johtuu, että on otettu käyttöön merkintä integraalifunktion kahden arvon erotuksen laskemiseksi:

$$\boxed{A = \Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a)}$$

Tämä merkintä, $\Big/_{a}^{b} F(x)$, luetaan sanoin " sijoitus a:sta b:hen iso F(x) ".

Esim. 24. Laskettava sen pinnan ala, jota rajoittavat x-akseli, suorat $x = -1$ ja $x = 2$ sekä paraabeli $y = x^2 + 1$.

Kun pinta-alafunktion lähtökohdissa nimenomaan korostettiin sitä, että pintaa yhtäällä rajoittavan funktion tulee koko tarkasteltavalla välillä olla ei-negatiivinen, niin tämä seikka on tietenkin aina varmistettava. Eihän tieliikennelakiakaan sovelleta autokaupoissa tehtyihin petoksiin eikä perusopetuslakia konkurssirikoksiin. Koska $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ kaikilla x:n reaaliarvoilla, niin ei-negatiivi-suusehto täytyy. Edelleen $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$, joten

$$A = \Big/_{-1}^{2} \left(\frac{x^3}{3} + x\right) = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1 = 6 \text{ pay.}$$