8. MÄÄRÄTYN INTEGRAALIN KÄSITE

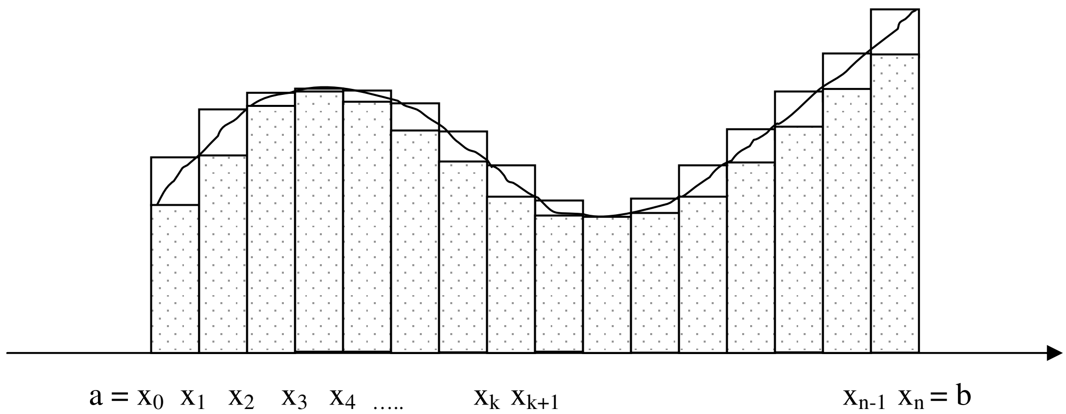
MÄÄRÄTTY INTEGRAALI on siis eräs raja-arvo, ja sovellutusten kannalta on äärettömän tärkeää oppia ymmärtämään, että kyseessä on äärettömän monen äärettömän pienen tulon summa.

Käydään läpi jokin (yleensä x-akselin) väli [a, b], ja jaetaan se erinomaisen pieniin osaväleihin. Jokaiselta osaväliltä valitaan funktion arvo (mikä arvo) ja kerrotaan välin pituudella. Kaikki nämä tulot lasketaan sitten yhteen ja annetaan tässä summassa kunkin jakovälin pituuden lähestyä rajattomasti nollaa. Mikäli tämä raja-arvo on olemassa, se on kyseisen funktion määrätty integraali I yli tarkasteltavan välin [a,b] ja sitä merkitään

$$I = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Tarkastellaan suljetulla välillä [a, b] jatkuvaa funktiota f. Jaetaan tämä väli n:ään yhtä suureen osaan, jolloin jokaisen osavälin pituus $h = \Delta x = (b - a)/n$. Funktio f on luonnollisesti jatkuva myös jokaisella tarkasteltavan välin osavälillä. Palautetaan mieleen, että suljetulla välillä jatkuva funktio aina saavuttaa suurimman ja pienimmän arvon ynnä jokaisen näiden välisen arvon ainakin yhdessä välin pisteessä.

Käydään lävitse väli [a, b] ylläkuvattuun jakoon liittyen siten, että jokaiselta osa-väliltä k määritetään funktion pienin arvo m_k ja kerrotaan tällä osavälin pituus. Kaikki näin määritetyt n tuloa lasketaan yhteen ja annetaan tälle nimeksi alasumma. Vastaavalla tavalla jokaiselta osaväliltä k määritetään funktion suurin arvo M_k ja kerrotaan tällä osavälin pituus. Kaikki nämä tulot (niin ikään n kpl) lasketaan yhteen. Saatua summaa sanotaan yläsummaksi.



Välin [a,b] edellä kuvattuun jakoon liittyvät jakopisteet voidaan indeksoida ja luetella pienimmästä suurimpaan, ja ovat yllä olevaan kuvaan merkitytkin:
$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = b$
Kuhunkin osaväliin liittyvät funktion f ao. välillä saavuttamat pienimmät arvot olkoot $m_1, m_2, ..., m_k, ..., m_n$, ja suurimmat $M_1, M_2, ..., M_k, ..., M_n$. Näin merkiten saadaan kirjoitetuksi ala- ja yläsummat:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + m_3 h + ... + m_k h + ... + m_n h = \sum_{k=1}^{n} h m_i = h \sum_{k=1}^{n} m_i$$

$$S_n = M_1 h + M_2 h + M_3 h + ... + M_k h + ... + M_n h = \sum_{k=1}^{n} h M_k = h \sum_{k=1}^{n} M_k$$

Edellissivun kuviossa alasumman geometrinen merkitys on antaa harmaalla pisteytyksellä korostettujen suorakulmioiden alojen summa, ns. sisämonikulmion pinta-ala. Yläsumma taas on läpinäkyvin suorakulmioin ulkomonikulmioksi täydennetyn alueen ala. Havaintoon perustuen lienee jokseenkin selvää, että sisämonikulmion ala on pienempi ja ulkomonikulmion ala puolestaan suurempi, kuin funktion f kuvaajan, x-akselin ja suorien x = a ja x = b rajoittaman alueen ala A:

$$s_n < A < S_n$$

Muistetaan taas, että määrätyn integraalin on sanottu olevan eräs raja-arvo, ja tässä yhteydessä tämä salaperäinen käsite, määrätty integraali voidaan määritelläkin.

****

Määritelmä 2.

Jos $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = I$

niin lukua I sanotaan funktion f määrätyksi integraaliksi yli välin [a,b] ja sitä merkitään

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

****

Jos funktio f jatkuvuusvaatimuksen lisäksi ei ole missään tarkasteltavan välin pisteessä negatiivinen, niin määritelty raja-arvo antaa suoraan sen alueen alan, jota rajoittavat x-akseli, suorat x = a ja x = b sekä funktion f kuvaaja. Määrätyn integraalin määritelmän kannalta on sinänsä täysin toissijaista, minkä merkkisiä arvoja funktio tarkasteluvälillä saa.
Kun sivun 28 kuviota tarkastelee, niin on ilmeistä, että jaon tihentyessä, jokaisen osavälin pituuden lyhetessä, n:n kasvaessa, sisämonikulmion ala ei yhdessäkään tällaisessa muutoksessa ainakaan vähene (yleensä aina kasvaa) eikä siis

alasummakaan vähene. Samoin on ilmeistä että ulkomonikulmion ala pienenee eli yläsumma vähenee, ja näiden yhteisenä raja-arvona on I.
Määrättyä integraalia määriteltäessä ei ole mitenkään oleellista rajoittua tasavälisiin jakoihin, eipä ole funktion jatkuvuuskaan välttämätön asia. Riittää olettaa, että jakovälien lukumäärän tihentyessä jokaisen osavälin pituus lähenee rajatta nollaa, ja että tarkasteltava funktio on tarkasteltavalla välillä rajoitettu (siis määritelty, mutta ei saa mennä missään pisteessä itseisarvoltaan äärettömyyksiin).

Määrätyn integraalin määritelmä voidaan myös antaa ns. välisumman avulla. Myös monet määritelmästä seuraavat raja-arvotarkastelut, määrättyä integraalia koskevat lauseet todistetaan välisumman avulla. Suoritetaan välin [a,b] tasajako pistein $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = b$. Mielivaltaista osaväliä voidaan merkitä $[x_{k-1}, x_k]$. Otetaan tältä väliltä mielivaltainen piste t_k , esimerkiksi välin keskipiste tai mikä tahansa piste. Olkoon edelleen m_k ja M_k kullakin osavälillä funktion pienin ja suurin arvo, vastaavasti. Joka ikisellä välillä on varmasti voimassa kaksoisepäyhtälö

$$m_k \le f(t_k) \le M_k$$

ja edelleen

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

eli välisumma aina on ala- ja yläsumman välissä. Viime mainittujen määrittelyssä käytettiin tasavälistä jakoa, ja aivan yhtä hyvin yllä olevat summat järjestyksineen voitaisiin kirjoittaa muodossa

$$\sum_{k=1}^{n} hm_k \le \sum_{k=1}^{n} h \cdot f(t_k) \le \sum_{k=1}^{n} hM_k ,$$

onhan $h = [x_{k-1}, x_k] = \dfrac{b-a}{n}$.

Sikäli kun funktion f määrätty integraali yli välin [a, b] on olemassa, niin ala- ja yläsummalla on sama raja-arvo I, ja kun nyt tiedetään, että välisumma on näiden kahden puristuksessa, puun ja kuoren välissä, niin myös välisummalla täytyy olla sama raja-arvo I. Jatkoa varten kannattaa pitää tarkoin mielessä, että

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b f(x)dx, \text{ kun } n \to \infty$$

Esim. 24. Lasketaan vakiofunktion f(x) = C määrätty integraali yli välin [a, b]. Vakiofunktio on hiukan erikoinen funktio siitä, että nyt välin [a, b] jokaisella osavälillä on $m_k = f(t_k) = M_k$, joten on samantekevää, käytetäänkö ala-, ylä- vaiko välisummaa.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} Ch = \sum_{k=1}^{n} C(x_k - x_{k-1}) = C\,[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots$$
$$+ (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})\,] = C(b-a)$$

Nyt aivan riippumatta n:n arvosta on

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} C(b-a) = C(b-a) = \int_a^b C\,dx\,.$$

Jos $C > 0$, niin $C(b – a)$ on erään suorakulmion pinta-ala. Sen asian nyt saattaisi tietää muutenkin, ilman integraaleja.