9. MÄÄRÄTTYÄ INTEGRAALIA KOSKEVIA LAUSEITA

****

Lause 9. Suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva.

****

Lausetta totuusarvo jätetään uskon asiaksi.
Sanontaa ”on integroituva” käytettiin jo integraalifunktion käsittelyn yhteydessä. Tällöin integroituminen tarkoitti integraalifunktion olemassaoloa. Lauseessa 9 tämä sanonta tarkoittaa sitä, että suljetulla välillä jatkuvan funktion alasummalla, välisummalla ja yläsummalla on (sama) raja-arvo, kun välin jako rajattomasti tihenee. Lause tarkoittaa siis sitä, että $I = \int_a^b f(x)dx$ on olemassa.
Kokonaan toinen asia on se, onko tämä raja-arvo määritettävissä helposti tai vaikeasti, mutta voidaan luottaa, että se on olemassa.

****

Lause 10. Jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä [a, b], niin

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx\,,$$

ts. vakiotekijä voidaan siirtää integraalin eteen tai edessä oleva vakiotekijä voidaan siirtää integraalin sisään.

Tod.: Kirjoitetaan lauseen kumpikin puoli välisumman avulla:

$$\sum_{k=1}^{n} C \cdot f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

Kun funktio f on jatkuva, niin myös funktio Cf on jatkuva ja lauseen 9 nojalla integroituva. Kun annetaan integroimisvälin jaon tihentyä, $n \to \infty$, niin yllä olevassa yhtälössä vasempana puolena oleva välisumma lähenee integraalia $\int_a^b C\cdot f(x)dx$, ja oikeana puolena oleva

välisumma puolestaan integraalia $C\int_a^b f(x)dx$.

****

****

Lause 11. Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia suljetulla välillä [a,b], niin

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

Tod.: Kun funktiot f ja g ovat jatkuva, niin myös niiden summafunktio f + g on jatkuva ja lauseen 9 nojalla integroituva. Kun käsitellään funktion f + g välisummaa, niin saadaan

$$\sum_{k=1}^{n}[f(t_k)+g(t_k)]\cdot(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k-x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} g(t_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$\to \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,\ \ kun\ \ n\to\infty.$$

****

Tähän saakka on pidetty selvänä, että integroimisessa yläraja b on aina ollut suurempi kuin alaraja a. Poikkeus on kerran tehty pinta-alafunktion käsittelyn yhteydessä yhtäsuuruus sallien, mutta ei enää määrätyn integraalin teoreettisessa käsittelyssä. Annetaan nyt integroimisrajojen vapaasti yhtyä ja sovitaan (määritellään), miten menetellään tilanteessa, jossa alaraja on ylärajaa suurempi;

****

Määritelmä 3.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,\ \ \text{kun}\ \ a > b.$$

****

Tämä määritelmä (siis sopimus, suom. huom.) on erittäin käyttökelpoinen ja sitä sovellutuksissa varsin usein käytetään. Tarvettakin ilmenee jo seuraavassa lauseessa.

****

Lause 12. Jos funktio f on jatkuva kaikilla kyseeseen tulevilla väleillä, niin

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,,$$

Tod.: Olkoon aluksi a < c < b. Suoritetaan välin [a, b] sellainen (tasavälinen) jako, missä c on yhtenä jakopisteenä. Jakopisteet lueteltuina pienimmästä suurimpaan ovat tällöin

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m = c, x_{m+1}, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = b,$$

ja funktion f välisumma yli välin [a, b] voidaan jakaa kahdeksi

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

.

Jaon tihentyessä oikeanpuolen ensimmäinen summa lähenee funktion f määrättyä integraalia yli välin [a, c] ja jälkimmäinen saman funktion määrättyä integraalia yli välin [c, b], mistä tulos jo seuraakin tapauksessa a < c < b.

Olkoon sitten piste c välin [a, b] ulkopuolella, vaikkapa c < a < b. Määritelmän 3 ja lauseen jo todistetun osan avulla saadaan:

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tapaus a < b < c on vastaavanlainen yhtälökäsittely.

****

****

Lause 13. Olkoon funktio f on jatkuva ja ei-negatiivinen suljetulla välillä [a,b].

Jos $\forall x \in [a,b]\ f(x) = 0$, niin $\int_a^b f(x)dx = 0$ ts. jos välin jokaisessa pisteessä funktio saa arvon nolla, niin funktion määrätty integraali yli tällaisen välin häviää

Jos $\forall x \in [a,b]\ f(x) > 0$, niin $\int_a^b f(x)dx > 0$ ts. jos välin jokaisessa pisteessä funktio saa positiivisen arvon, niin funktion määrätty integraali yli tällaisen välin on myös positiivinen.

Tod.: Jos f(x) = 0 tarkasteltavan välin jokaisessa pisteessä, niin missä tahansa välisummassa jokainen termi on nolla ja tällaisten termien summa on nolla, onpa niitä miten monta hyvänsä.

Jos sitten oletetaan, että f saa jokaisessa välin pisteessä positiivisen arvon, niin funktiolla f jatkuvana on tällä välillä pienin arvo. Olkoon se m. Funktiolle f muodostetuista välisummista kaikkein pienin on jakoon n = 1 liittyvä välisumma m(b – a) > 0. Funktio f jatkuvana on myöskin integroituva ja integraalin arvon ilmoittaa tällöin myös alasummien raja-arvo, kun integroimisvälin jako rajattomasti tihenee. Kun jaon tihentyessä alasumma ei missään tapauksessa ainakaan pienene ja se pienimmilläänkin on positiivinen, niin silloin myös $\int_a^b f(x)dx > 0$.

****

Todistetulla lauseella on välitön seuraus:

****

Seurauslause 13.1. Olkoon funktiot f ja g jatkuvia suljetulla välillä [a, b] ja olkoon välin jokaisessa pisteessä f(x) ≥ g(x) sekä a < b. Tällöin

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx,$$

****

Lausetta 13 seurauksineen käytetään ehkä eniten joidenkin väitteiden todistamiseen, mutta joskus myös integraalin suuruusluokan arviointiin tapauksissa, joissa integraalia ei saada heti suoraan lasketuksi. Seuraavalla lauseella on hiukan vastaavaa merkitystä.

****

Lause 14. Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä [a,b] , a < b. Olkoon edelleen m ja M funktion f tällä välillä saavuttamat pienin ja suurin arvo. Tällöin

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

missä yhtäsuuruus tulee kyseeseen vain silloin, kun f on vakiofunktio.

Tod.: Vakiofunktion tapaus on triviaali. Oletetaan siis, ettei f ole vakio koko välillä. Välin [a, b] jokaisessa pisteessä on voimassa $f(x) \geq m$. Seurauslauseen 13.1 nojalla saadaan, jotta

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b m dx = m(b-a),$$

missä yhtäsuuruus tulisi kyseeseen vain silloin, kun f olisi vakio.

Koska funktion vakioisuus suljettiin pois, niin $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx$.

Vastaavalla tavalla todistetaan väitteenä olevan kaksoisepäyhtälön oikean puoleinen epäyhtälö $\int_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

****

Seuraavaksi todistettavalla **integraalilaskennan väliarvolauseella** on keskeinen merkitys johdettaessa yleisteoreettisesti määrätyn integraalin määrittämismenetelmä. Siinä on paljon yhtäläisyyttä pinta-alafunktion yhteydessä esiteltyyn ”derivaatan kautta” -menetelmään.

****

Lause 14. Integraalilaskennan väliarvolause

Jos funktio f jatkuva suljetulla välillä [a,b] , a < b, niin vastaavalta avoimelta väliltä löytyy ainakin yksi sellainen piste ξ, että

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$$

Tod.: Jos f on vakiofunktio, niin pisteeksi ξ kelpaa mikä tahansa avoimen välin piste. Oletetaan siis, ettei f ole vakio koko välillä [a, b]. Tällöin paitsi että se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa M ja m, se saavuttaa kaikki näiden arvojen väliset arvot ainakin yhdessä pisteessä. Olkoot nyt x_1 ja x_2 sellaiset välin [a, b] pisteet, että $f(x_1) = m$ ja $f(x_2) = M, x_1 < x_2$. Soveltamalla aluksi lausetta 14 saadaan aluksi, jotta

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

ja edelleen jakamalla lausekkeella b – a > 0

$$m < \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx < M..$$

Viimeksi kirjoitetusta käy ilmi, että integraalin arvo jaettuna integroimisvälin pituudella on aina funktion pienimmän ja suurimman arvon välissä (vakiofunktion tapaus poissuljettu). Väliltä a < x < b löytyy, itse asiassa väliltä $x_1 < x < x_2$ löytyy nyt sellainen piste ξ, että funktio f tällä välillä saavuttaa täsmälleen sen arvon, joka on integraalin arvon ja välin pituuden osamäärä, koska jatkuva funktio saavuttaa jokaisen pienimmän ja suurimman arvon välisen arvon ainakin kerran. Siten piste ξ toteuttaa ehdon

$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = f(\xi)$, josta nimittäjä poistamalla saadaan väite.

****

Huom.! Todistuksessa on pidetty ikään kuin selvänä, että $x_1 < x_2$. Näin ei tietenkään ole aina eikä ainakaan silloin, kun f on koko välillä aidosti vähenevä funktio. Todistuksessa tulisi tietenkin käsitellä tämä tapaus, jos tiukkapipoisia oltaisiin. Muodollisesti prosessi on kuitenkin täysin samanlainen, käsitellään vain väliä $x_2 < x < x_1$.

Lähdetään näiden pohjustusten jälkeen tarkastelemaan funktiota, jossa muuttujana on määrätyn integraalin yläraja ts. funktiota

$$I = I(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

missä f on jatkuva välillä [a,b]. Tässä integraalissa siis tarkastellaan väliä [a,x], missä muuttujana on välin loppupiste aivan niin kuin oli pinta-alafunktiossakin. Tässä on merkitty symbolilla t sitä muuttujaa, joka juoksee välin a:sta x:ään. Jos tämän integraalin välisummia kirjoiteltaisiin näkyviin, niin jakopisteet olisivat

$$a = t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n = x.$$

****

Lause 15.

Funktio I: $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ on välillä [a,b], a < b derivoituva ja $I'(x) = f(x)$.

Tod.: Muokataan funktion I erotusosamäärää tukeutuen määritelmään 3 sekä lauseeseen 14:

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] =$$

$$\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Sovelletaan integraalilaskennan väliarvolausetta 14. Sen mukaan avoimelta väliltä $]x, x+h[$ löytyy ainakin yksi sellainen piste ξ, että $f(\xi)$ = integraalin $\int_x^{x+h} f(t)dt$ arvo jaettuna välin pituudella h (tai tämän vastaluvulla) eli että $f(\xi) = \frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f(t)dt$. Tällöin erotusosamäärälle saatua arvoa edelleen muokaten saadaan:

$$\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\cdot f(\xi)\cdot h = f(\xi).$$

Kun annetaan h:n lähestyä rajattomasti nollaa, niin lukujen x ja x + h välissä varmasti oleva luku ξ lähestyy rajattomasti x:ää. Koska f on jatkuva, niin

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = I'(x).$$

****

Todistettua lausetta voidaan pitää sisällöltään varsin yllättävänä. Määrätty integraali, eräs raja-arvo, onkin nyt "sangen läheistä sukua" integraalifunktiolle. Tätä seikkaa tietenkin pinta-alafunktion käsittely jo vahvasti ennakoi.

Määrätyn integraalin teoreettinen käsittely aloitettiin lauseella 9, jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva ja tarkoitettiin sanonnalla sitä, että määrätty integraali esimerkiksi välisumman raja-arvona on olemassa. Tässä yhteydessä lause tarkoittaa sitä, että funktio I: I(x) eli funktion f määrätty integraali yli välin [a, x] on olemassa. Juuri saadun mukainen tulos $I'(x) = f(x)$ osoittaa, että tällä funktiolla on vielä derivaattakin, mikä puolestaan takaa funktion I jatkuvuuden.

****
Lause 16.

ANALYYSIN PERUSLAUSE

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)}$$

Tod.: Olkoon F jokin f:n integraalifunktio. Kun lauseen 15 mukaan myös funktio I on jokin funktion f integraalifunktio, niin I ja F eroavat toisistaan korkeintaan vakiolla elikkä

$$I(x) = F(x) + C$$

Määritelmän 3. nojalla tiedetään, että $I(a) = 0$, joten

$F(a) + C = 0$, josta $C = -F(a)$.
Siten on

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

ja kun tähän vielä sijoitetaan x = b, niin saadaan pitkään ja hartaasti pohjustellen etsitty tulos

$$I(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

****

Saatu tulos on differentiaali- ja integraalilaskennan ydinasia, ja sitä merkitään yleisesti ja kansainvälisesti

$$\int_a^b f(x)dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

Asia voidaan suusanallisestikin formuloida:

Määrättyä integraalia ei tarvitse lähteä laskemaan käyttäen mitään raja-arvon määrittämismenetelmiä, vaikka määrätty integraali – se mielessä pidettäköön ja monesti, ainakin vielä yhdesti ja sangen painavasti mainittakoon – on eräs raja-arvo. Integraalin arvo voidaan siis laskea täysin mekaanisesti:

Otetaan jokin funktion f integraalifunktio F, tavallisesti se, jossa vakio C = 0. Lasketaan, mitä on F(b) ja mitä on F(a), ja vähennetään näin saadut luvut toisistaan.

Kun määrätyn integraalin näin määrittää, ei tarvitse koko käsitettä vähääkään ymmärtää eikä edes ajatuksissa käy, että joka kerta on kyseessä erään raja-arvon määritys. Sen sijaan on hivenen vaikea ymmärtää sellaista opettajaa, joka korostaa määrättyä integraalia pelkästään integraalifunktion kahden arvon erotuksena.

Sanotulla oudolla korostuksella on hyvin loogisia seurauksia. Korkeammassa matematiikassa käsitellään pinta- ja tilavuusintegraaleja. Kun yksiulotteisessa avaruudessa laskettavan määrätyn integraalin yhteydessä juostaan eräs x-akselin väli, niin itse integraalin laskemisessa olennaisia ovat vain välin päätepisteet. Kun otetaan integraalia jokin pinnan yli, tällä pinnalla on reunaviiva. Jos taas tarkastellaan tilavuusintegraalia, niin tällainen tilavuus määräytyy jonkin umpinaisen pinnan kautta. Eräitä tilavuusintegraaleja voidaan muuttaa tilavuutta rajoittavan pinnan yli otetuksi pintaintegraaliksi ja päinvastoin. Toisekseen sitten pintaintegraaleja voidaan muuttaa pintaa rajoittavaa reunaviivaa pitkin otetuksi viivaintegraaliksi. Siis kaksiulotteisessa avaruudessa jonkin pinnan yli otettava integraali voidaan palauttaa pelkästään pintaa rajoittava reunaviivan käsittelyyn ja kolmiulotteisessa avaruudessa tilavuustilavuusintegraali voidaan palauttaa raja-pinnan käsittelyksi (ja päinvastoin)

Pinta- ja tilavuusintegraaleja laskettaessa on luonnollisesti suoritettava jonkinlaisia derivointi – tai integrointioperaatioita, kuten olet huomannut tarvittavan myös yksiulotteisissa tapauksissa. Nämä asiat saavat nyt kuitenkin jäädä korkeakoulu-opintojen puolelle.

Kun integraalin laskeminen on pelkkää alkeismatematiikkaa, ei tehtävän

Laske $\int_a^b f(x)dx$

vaikeusaste välttämättä vielä päätä huimaa. Tosin poikkeuksia löytyy, sillä saattaa olla hankala löytää f:n integraalifunktiota, tai f voi olla paloittain määritelty tai sisältää itseisarvoja.
Kokonaan toinen asia on sitten määrätyn integraalin soveltaminen pinta-alojen tai tilavuuksien määrittämiseen puhumattakaan sovellutusmahdollisuuksista fysiikan puolella. Näissä soveltavissa tehtävissä on usein huomattavaa painoa sillä, että saattaa itse joutua määrittämään integroimisrajat ja monesti myös sen tavaran, mitä integraalimerkin ja dx:n väliin työntää. Itse integraalin laskeminen saattaa pistetuotoltaan olla korkeintaan puolet tehtävän maksimipistemäärästä.

Jos siis suoritettavanasi olevan tehtävän sanamuoto on: laske $\int_a^b f(x)dx$, niin

löydettyäsi funktion F, jolle

on voimassa välin [a, b] JOKAISESSA PISTEESSÄ ehto

$$F'(x) = f(x),$$

loppu on pelkkää rutiinia, ehkä huolellisuutta vaativaa, mutta ei juuri edellytä tavanomaisia peruslaskutoimituksia kummempien asioiden hallintaa.

Joissain tehtävissä saattaa käydä kyllä niinkin, että helposti löydetään funktio F, joka täyttää ehdon F´(x) = f(x) välillä [a, b] vain osittain (ei siis välin jokaisessa pisteessä), eikä tätä pikku puutetta huomata, niin pistesaalis ei tahdo suorituksesta paljonkaan karttua.

Esim. 25. $\int_0^{\pi} \cos x dx = \Big/_0^{\pi} \sin x = 0 - 0 = 0.$

Esim. 26. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$

Esim. 27. $\int_1^4 (x + \frac{1}{x})^2 dx = \int_1^4 (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})dx = \Big/_1^4 (\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}) =$

$$= \frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4 - \frac{1}{4} - (\frac{1}{3} + 2 - 1) = 21 + 8 - \frac{1}{4} - 1 = 27\frac{3}{4}.$$

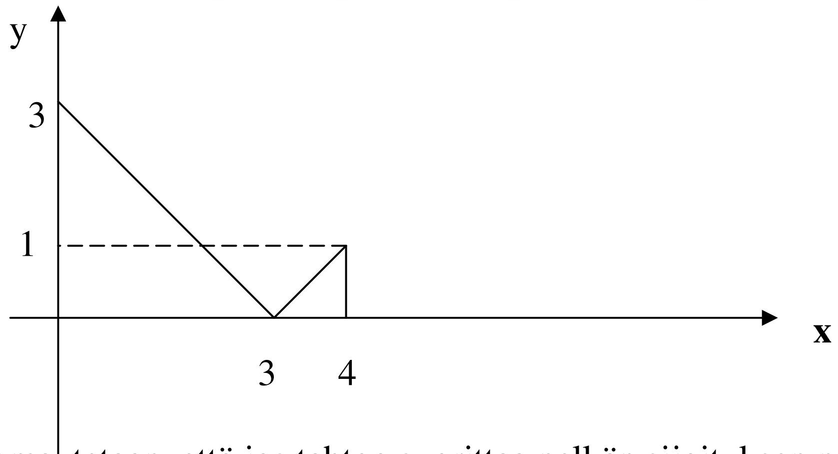
Esim. 28. Laske $\int_0^4 |3-x|\,dx$.

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, \text{ kun } 3-x \geq 0 \text{ eli kun } x \leq 3 \\ x-3, \text{ kun } 3-x < 0 \text{ eli kun } x > 3 \end{cases}$$

Koska integroitavalla funktiolla on erilainen esitysmuoto integroimisvälin eri osaväleillä, niin integroidaan paloittain (lause 12)

$$\int_0^4 |3-x|\,dx = \int_0^3 (3-x)\,dx + \int_3^4 (x-3)\,dx = \Big/_0^3 3x - \frac{x^2}{2} + \Big/_3^4 \frac{x^2}{2} - 3x =$$

$$= 3\cdot 3 - \frac{9}{2} + 0 + \frac{16}{2} - 3\cdot 4 - (\frac{9}{2} - 3\cdot 3) = 4\frac{1}{2} + 8 - 12 + 4\frac{1}{2} = 5$$



Huomautetaan, että jos tahtoo suorittaa pelkän sijoituksen nollasta neloseen, niin täytyy löytyä sellainen integraalifunktio F(x), jolle $F'(x) = |3-x|$ välin [0,4] jokaisessa pisteessä. Kun nyt derivaatta F´ on olemassa, niin täytyy funktion F(x) olla jatkuva.

Koska $|3-x| = \begin{cases} 3-x, \text{ kun } 3-x \geq 0 \text{ eli kun } x \leq 3 \\ x-3, \text{ kun } 3-x < 0 \text{ eli kun } x > 3 \end{cases}$, niin

$$F(x) = \begin{cases} 3x - \frac{x^2}{2} + C, \text{ kun } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + C_1, \text{ kun } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Jatkuvuuden kannalta kriittinen kohta on x = 3, koska F(x) muutoin on jatkuva kahtena paloittain määriteltynä polynomifunktiona.

$$\lim_{x\to 3-} F(x) = \lim_{x\to 3-} (3x - \frac{x^2}{2} + C) = C + 4\frac{1}{2} = F(3)$$

$$\lim_{x\to 3+} F(x) = \lim_{x\to 3+} (\frac{x^2}{2} - 3x + C_1) = C_1 - 4\frac{1}{2}$$

Jatkuvuus pisteessä x = 3 toteutuu nyt ehdosta $C + 4\frac{1}{2} = C_1 - 4\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $C_1 = C + 9$. Valitaan nyt C = 0, jolloin $C_1 = 9$ ja integraalin arvo voidaan laskea sijoituksena nollasta neloseen seuraavasti:

Eräs jatkuva integraalifunktio $F(x) = \begin{cases} 3x - \frac{x^2}{2}, \text{kun } 0 \le x \le 3 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + 9, \text{kun } 3 < x \le 4 \end{cases}$ ja

$$\int_0^4 |3 - x| dx = F(4) - F(0) = \frac{16}{2} - 3 \cdot 4 + 9 - 3 \cdot 0 + \frac{0^2}{2} = 5$$

Osaat varmaan itsekin päätellä, kumpi menetelmä helpompi oli.