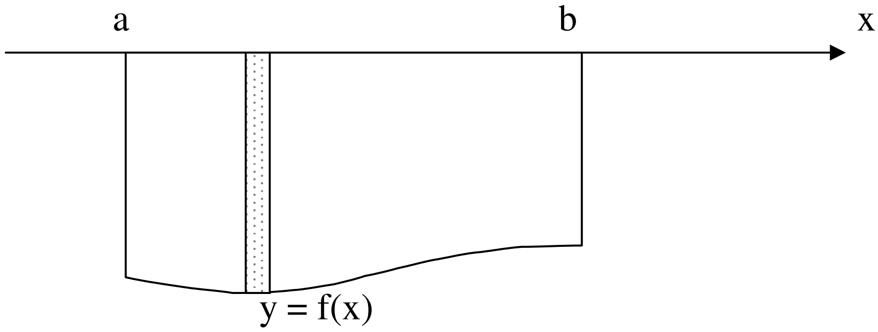
# 10. MÄÄRÄTYN INTEGRAALIN KÄYTTÖ ERÄIDEN PINTA-ALOJEN LASKEMISESSA

Edellä on todettu, että $\int_a^b f(x)dx$ antaa x-akselin ja suorien x = a, x = b sekä funktion f kuvaajan väliin jäävän tasoalueen alan, mikäli b > a ja tällä välillä toteutuu ehto f(x) ≥ 0. Luonnollisesti on paljonkin tilanteita, joissa funktion kuvaaja kulkee jollakin välillä osittain, ehkä kokonaankin pelkästään x-akselin alapuolella ja voi tällöin kahden y-akselin suuntaisen suoran kanssa rajoittaa äärellisen tasoalueen. Kuinkas sellaisen ala?




Kun palataan määrättyyn integraaliin sellaisen summan raja-arvona, jossa on yhteenlaskettavana äärettömän monta äärettömän pientä tuloa, ja nämä tulot ovat sellaisia, joissa tekijöinä ovat funktion arvo ja erään osavälin pituus (katso yllä olevaa kuviota), niin **nämä tulot ovat kaikki nyt negatiivisia.** Ovathan kaikki funktion f arvot negatiivisia. Tällöin $\int_a^b f(x)dx$ antaa kyseisen pinta-alan vastaluvun! Kun nyt jotain tämäntapaista probleemaa lasketaan, ja on selvitetty, että koko integroimisvälillä rajakäyrä on sellainen, ettei saa ainakaan positiivista arvoa, niin pinta-ala on ilmeisesti integraalin vastaluku:

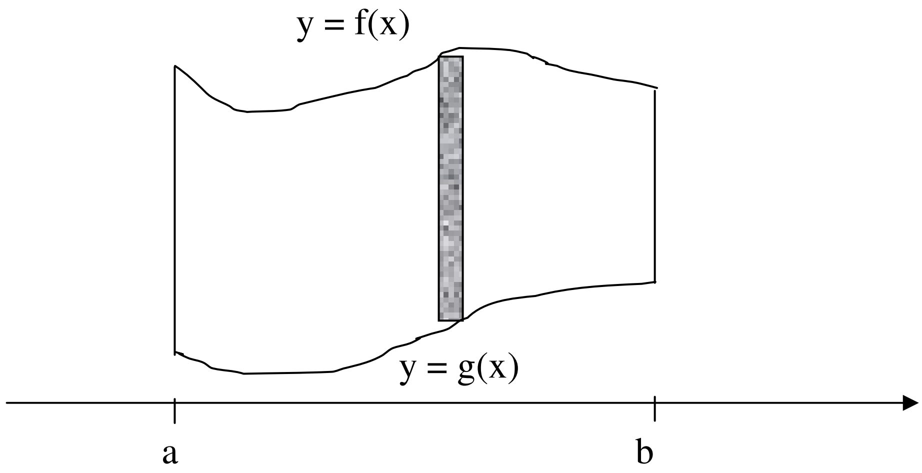
$$A = -\int_a^b f(x)dx \ ,$$

missä miinusmerkin voi viedä integraalimerkin sisään tai hukata siihen, että vaihtaa integroimisrajat.

Tavallista on, että pinta-alalaskuissa joutuu määrittämään **kahden käyrän väliin jäävän** tasoalueen alan. Tällöinkin pitämällä mielessä sen, että määrätty integraali on eräs raja-arvo, missä on kyseessä summa, jossa on paljon, paljon pieniä yhteenlaskettavia, ymmärtää piankin, että rajakäyrien keskinäisellä sijainnilla on melko ratkaiseva merkitys. Kun integroimisväli jaetaan osiin, niin pinta-ala- sovellutuksissa tämä summa vastaa taasen sitä, että lasketaan yhteen hyvin kapeiden suorakulmioita muistuttavien kuvioiden alat.

Olkoon kahden rajakäyrän yhtälöt $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ vielä niin, että suorien $x = a$ ja $x = b$ välillä jokaisessa pisteessä $f(x) \geq g(x)$. Välin [a, b] jaossa saadaan jälleen suorakulmioita muistuttavia osa-alueita, joita on paljon, kun jako on tiheä.

Kun funktion f kuvaaja koko välillä [a, b] kulkee g kuvaajan yläpuolella, niin erotus $f(x) – g(x)$ on aina ei-negatiivinen ja tulo $[f(x) – g(x)]\,\Delta x$ on niin ikään aina ei - negatiivinen ja sellaisenaan ilmoittaa sitten alla olevaan kuvaankin hahmotellun hyvin kapean alueen alan. Kaikkien näiden ”soirojen” alojen summa antaa sitten sanottujen käyrien ja suorien $x = a$, $x = b$ jäävän alueen pinta-alan, kun jako tihenee eli osavälin pituus $\Delta x$ lähenee rajattomasti nollaa.




****************************************************************

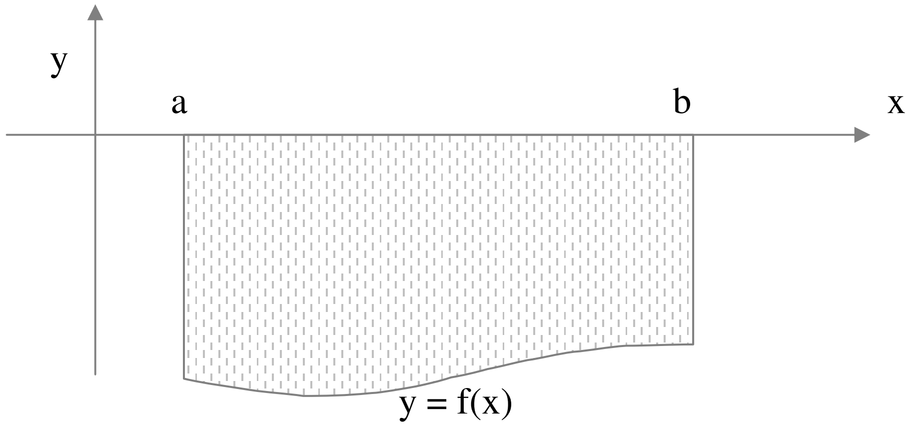
**Lause 17.**

Jos tasoalueen projektio x-akselilla on väli [a, b] ja aluetta rajoittaa ylhäältä funktion f ja alhaalta funktion g kuvaaja, ja asianomaisen välin jokaisessa pisteessä $f(x) \geq g(x)$, niin kyseisen tasoalueen pinta-ala

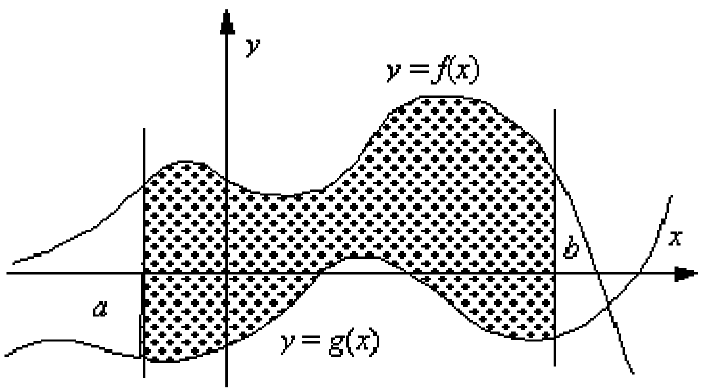
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

****************************************************************

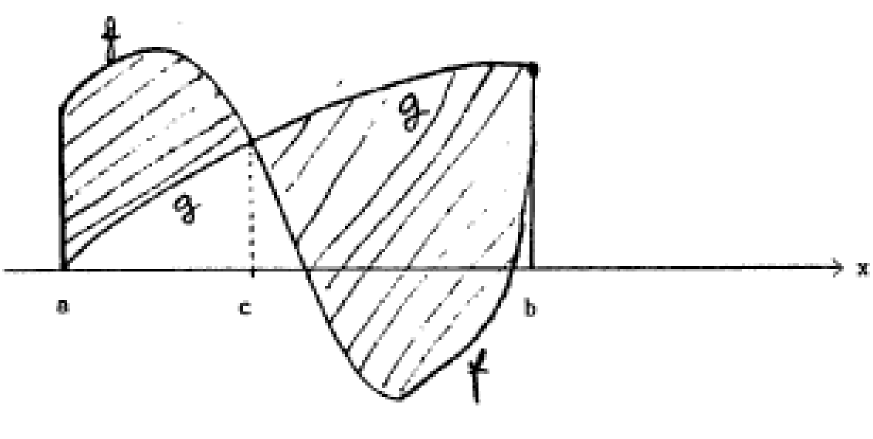
**Huomautetaan** vielä kerran siitä, että lauseen käyttöedellytykset on tarkoin selvitettävä ja mielessä pidettävä. Suoritukseen on perusteltava, missä pinta-alansa määritystä kaipaava alue sijaitsee, ja miten on sen rajakäyrien keskinäinen sijainti. Seuraavassa on kuvattu erilaisia tilanteita valmiina. Näiden piirtäminen on saattanut käytännön laskutehtävässä vaatia huomattavankin työmäärän, ja melkein aina on kyseessä epäyhtälön ratkaiseminen. Kun näen rajakäyrien yhtälöt y = f(x) ja y = g(x) on annettu, niin epäyhtälön f(x) $\geq$ g(x) $\Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ ratkaisu antaa ne x:n arvot, joilla f:n kuvaaja kulkee g:n kuvaajan yläpuolella, ehkäpä sivuavatkin jossain toisiaan.




$$A = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx =$$




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$$

Opiskelijoiden keskuudessa on joskus esiintynyt vaikeuksia suorittaa tehtäviä, jossa kahden käyrän väliin jäävä alue osin on sijainnut x-akselin ala- ja osin yläpuolella, tai kokonaan x-akselin alapuolella. Tällä asialla ei kuitenkaan ole mitään merkitystä, sillä ainut ratkaiseva tekijä on käyrien keskinäinen sijainti, mikä määrää erotuksen f(x) – g(x) etumerkin, ja määrättyä integraalia kuvaavassa summassa kunkin yhteenlaskettavan etumerkin, jonka pinta-alasovellutuksissa tulee olla ei-negatiivinen. Asia on niinkin, että jos puhutaan käyrän y = f(x), suorien x = a, x = b sekä x-akselin rajoittaman alueen alasta, niin x-akselia voidaan pitää toisena rajakäyränä: g(x) = 0. Jos funktion f kuvaaja sijaitsee x-akselin yläpuolella, niin

$$A = \int_a^b [f(x) - 0]dx = \int_a^b f(x)dx \ ,$$

kuten on jo monesti todettu. Tilanne esiintyi jo pinta-alafunktion käsittelyn yhteydessä.

Erityistä tarkkuutta vaaditaan alimman kuvan esittämässä tapauksessa, joissa rajakäyrät menevät integroimisvälillä ristiin. KÄYRIEN KESKINÄINEN SIJAINTI ON SELVITETTÄVÄ!

**Esim. 29.** Laske suorien y = 2x – 1, y = x + 3, x = 1 ja x = 3 rajoittaman tasoalueen (puolisuunnikkaan ala).

Kysytään, millä x:n arvoilla suora y = 2x – 1 kulkee suoran y = x + 3 yläpuolella:

$2x - 1 > x + 3 \Leftrightarrow x > 4.$

Integroimisväli on $1 \leq x \leq 3$. Koko tällä välillä loivemmin nouseva suora on yläkäyränä ja siten

$$A = \int_1^3 [(x+3) - (2x-1)]dx = \int_1^3 [x + 3 - 2x + 1]dx = \int_1^3 (4 - x)dx = \Big/_1^3 (4x - \frac{x^2}{2}) =$$

$$= 4 \cdot 3 - \frac{9}{2} - (4 \cdot 1 - \frac{1}{2}) = 12 - \frac{9}{2} - 4 + \frac{1}{2} = 4$$

**Vastaus**: Ala on neljä pinnan yksikköä.

**Esim. 30.** Käyrät y = cosx ja y = cos(x/2) rajoittavat välillä [0,2π] jonkinlaisen tasoalueen. Selvitä millainen se on ja määritä sen ala.

Trigonometrisia epäyhtälöitä ei ole käsitelty, mutta yhtälön avulla saadaan kuitenkin selville, missä käyrät leikkaavat. Riittää toki etsiä käyrien yhteiset pisteet integroimisväliltä, mutta ensin tarvitaan täydellinen ratkaisu, josta sitten poimitaan tarvittavat leikkauspisteet.

$$\cos x = \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{x}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2n\pi \text{ taikka} \\ \frac{3x}{2} = 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = 4n\pi \text{ taikka } x = \frac{4n\pi}{3}$$

Jos nyt lähdetään kulkemaan origosta kasvavan x:n suuntaan, niin käyrät leikkaavat origossa (n = 0). Seuraava leikkauspiste on $\frac{4\pi}{3}$ (n = 1) ja sitä seuraava $\frac{8\pi}{3}$ (n = 2) onkin jo integroimisvälin ulkopuolella. Koska funktio y = cos(kx) on jatkuva, käyrillä y = cos x ja y = cos(x/2) ei voi integroimisvälillä olla muita yhteisiä pisteitä. Mikä on keskinäinen sijainti?

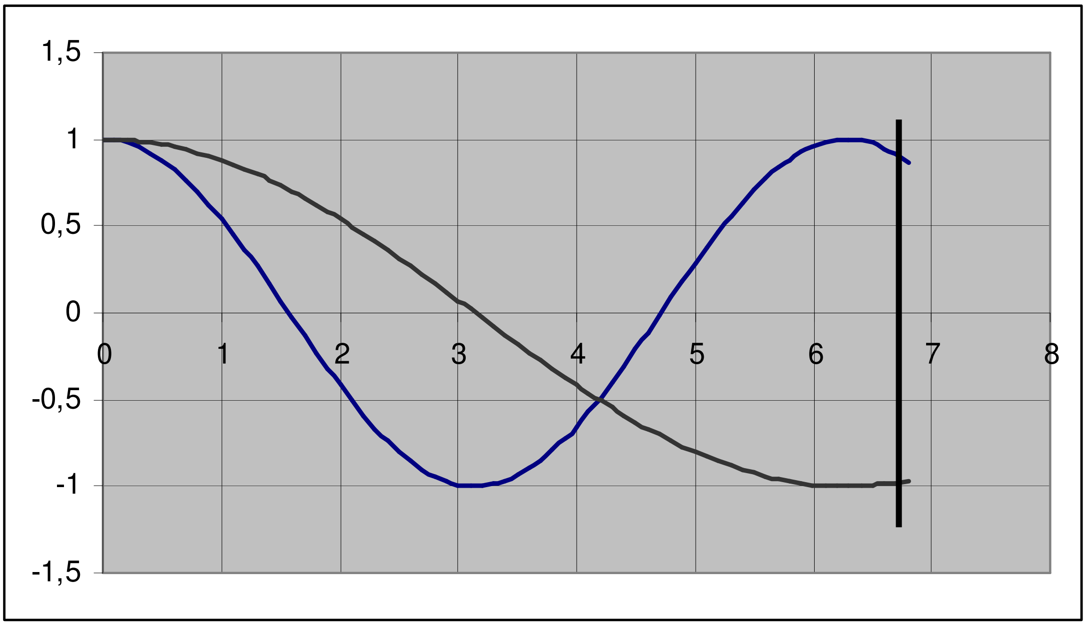
Esimerkiksi piste x = π kuuluu välille $\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$. Lasketaan kummankin funktion arvo tässä pisteessä:

$\cos\pi = -1$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, joten välillä $\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$ käyrä y = cos $\frac{x}{2}$ kulkee käyrän y = cos x yläpuolella.

Menevätkö käyrät ristiin tässä pisteessä vai sivuavatko ne vain toisiaan?

Seuraava käyrien leikkauspiste on $\frac{8\pi}{3}$ ja vaikka se ei kuulukaan integroimisvälille, niin laskemalla näiden funktioiden arvot välille $\left[\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]$ kuuluvassa pisteessä x = 2π voidaan päätellä käyrien keskinäinen sijainti integroimisvälin loppuosassa:

$\cos 2\pi = 1$ ja $\cos\frac{2\pi}{2} = -1$, joten välillä $\left[\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$ käyrä y = cos $\frac{x}{2}$ kulkee käyrän y = cos x alapuolella.




$$A = \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \left[\cos(\frac{x}{2}) - \cos x\right]dx + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \left[\cos x - \cos(\frac{x}{2})\right]dx =$$

$$= \Big/_0^{\frac{4\pi}{3}} \left[2\sin(\frac{x}{2}) - \sin x\right] + \Big/_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \left[\sin x - 2\sin(\frac{x}{2})\right] =$$

$$= 2\sin(\frac{2\pi}{3}) - \sin(\frac{4\pi}{3}) - 2\sin 0 + \sin 0 + \sin 2\pi - 2\sin\pi - \sin(\frac{4\pi}{3}) + 2\sin(\frac{2\pi}{3}) =$$

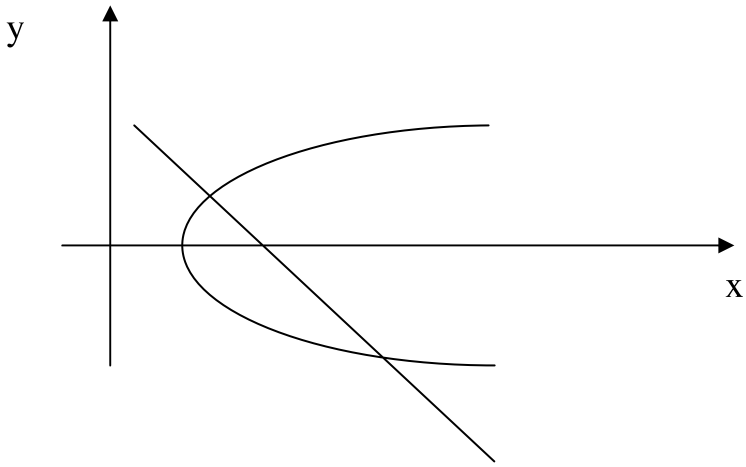
$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 0 - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Näyttäisi kumma kyllä siltä, että kaksiosaisen alueen osat ovat keskenään samankokoiset erilaisesta muodostaan huolimatta. Ala on siis suuruudeltaan $3\sqrt{3}$ eli noin 5.2 pinnan yksikköä.

**Huomautus**: Jos trigonometrisiä funktioita sisältävissä integraaleissa toinen raja on nolla, sen sijoittamatta jättäminen voi olla kohtalokasta.

**Esim. 31.** Määritä suoran x + y = 3 ja paraabelin $x = y^2 + 1$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Paraabeli $y = ax^2$ aukeaa joko ylös- tai alaspäin riippuen siitä, onko a > 0 vai onko a < 0. Jos käyrän yhtälö on muotoa $x = ay^2$, niin kyseessä on paraabeli, joka aukeaa oikealle, jos a > 0. Aukeamissuunta on vasempaan, mikäli a < 0. Kummassakin tapauksessa paraabelin huippu on origossa. Vakiotermin lisäys vain siirtää paraabelin $x = ay^2$ huippua pitkin x-akselia. Kuvio on siten pääpiirteissään alla olevan näköinen:




Haetaan ensiksi kuvaajien leikkauspisteet:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ x = y^2 + 1 \end{cases} \quad \text{sijoitetaan x:}$$

$$3 - y = y^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \Leftrightarrow y = 1 \text{ tai } y = -2$$

Vastaavat x:n arvot ovat 2 ja 5. Leikkauspisteet ovat siis (2,1) ja (5,-2).

Jos nyt integroitaisiin pitkin x-akselia, niin välillä [1, 2] olisi yläkäyränä $y = \sqrt{x - 1}$ ja alakäyränä $y = -\sqrt{x - 1}$. Välillä [2,5] taas olisi yläkäyränä suora y = 3 – x ja alakäyränä edelleen $y = -\sqrt{x - 1}$. Pitäisi laskea kahden eri integraalin summa.

Voidaan myös menetellä niin (ja päästään vähemmällä), että integroidaankin pitkin y-akselia. Lausutaan siis kumpikin rajakäyrä niin, että niissä on esitetty x muuttujan y funktiona.

Käyrien rajoittaman pinta voidaan ajatella kasatuksi hyvin kapeista suorakulmioista, joiden kanta on dy, ja korkeus suoran x - koordinaatin ja paraabelin x-koordinaatin erotus (aina suurempi – pienempi). Käytäessä kaikki nämä suorakulmiot läpi muuttuja y juoksee välin [–2, 1] ja

$$A = \int_{-2}^{1} \left[ (3-y) - (y^2+1) \right] dy = \int_{-2}^{1} \left[ -y^2 - y + 2 \right] dy = \int_{1}^{-2} (y^2 + y - 2)\, dy =$$

$$= \Big/_{1}^{-2} \left( \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - 2y \right) = \frac{-8}{3} + \frac{4}{2} - 2 \cdot (-2) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = -\frac{9}{3} + \frac{3}{2} + 4 + 2 = \frac{9}{2}$$

Kysytty ala on 4½ pinnan yksikköä