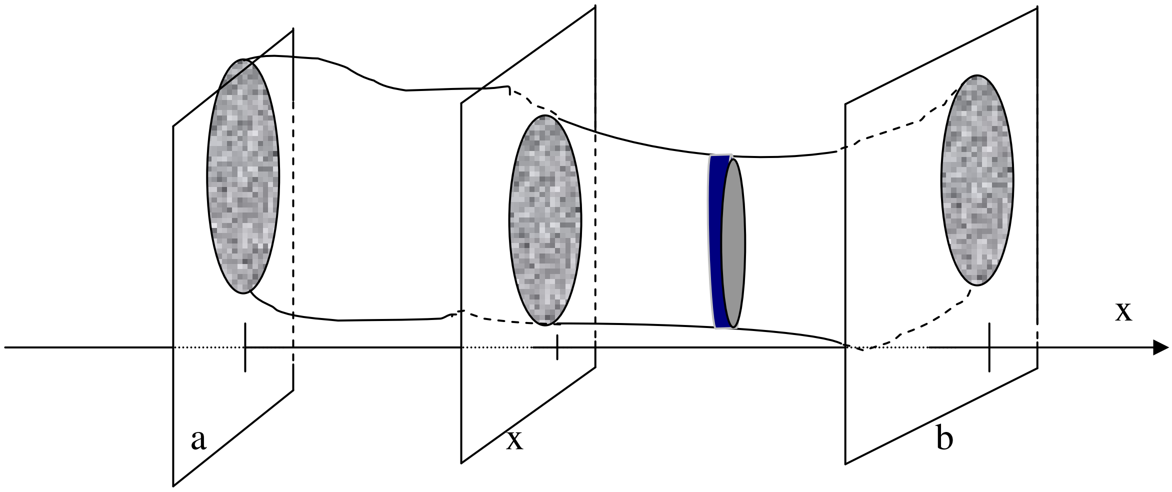
11. MÄÄRÄTTY INTEGRAALI JA TILAVUUS

Tilavuus on sen verran arkielämässä viljelty käsite, että useimmiten sen syvemmin edes miettimättä ymmärretään, mitä juomalasin tai pikkuvauvan kylpyammeen tilavuudella tarkoitetaan. Matematiikassa käsitteellä tarkoitetaan tavallisesti jonkin suljetun pinnan sisään jäävää avaruuden osaa. Suljettu pintahan on sellainen, että ken sellaisen sisään joutuu, poispääsyn mahdollisuutta ei ole.

Lukion integraalilaskennan kurssissa rajoitutaan enimmäkseen tapauksiin, joissa avaruuden osaa rajoittava pinta syntyy jonkun funktion kuvaajan pyörähtäessä jonkun suoran (tavallisesti x-akselin) ympäri. Melko usein näin syntyvää avaruuden osaa leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, jotka ovat kohtisuorassa pyörähdysakselia vastaan. Joskus nämä tasot ovat surkastuneet pisteiksi, kuten esimerkiksi pallon tapauksessa on laita.

Ajattelun laajentaminen pinta-alojen määrityksestä tilavuuden määrityksiin sujuu pitämällä mielessä aina se, että määrätty integraali on erään summan raja-arvo, jossa summassa on äärettömän monta äärettömän pientä yhteenlaskettavaa. Pinta-aloja määritettäessä tämän summan termit olivat hyvin kapeiden suorakulmioiden aloja. Äärellisulotteisen kappaleen voidaan taas katsoa muodostuvan päällekkäin pinotuista lieriöistä, joiden korkeus (dx) on erinomaisen pieni, mutta niistä jokaisen pohjapinta-ala täytyy tuntea, kuten pinta-alojen määrityksen yhteydessä tunnettiin asianomaisen suorakulmion toisen sivun pituus muuttujan x funktiona.

Sopinee opintojen tässä vaiheessa uskoa, että suoran lieriön tilavuus on pohjan alan ja korkeuden tulo, $V = Ah$. Kun tilavuutta määritetään integraalin avulla, niin nyt täytyy olettaa, että siinä avaruuden osassa, missä tilavuuden määrityksen kohteena oleva kappale sijaitsee, tämä pohjapinta-ala tunnetaan integroimis-muuttujan (jatkuvana) funktiona. Kappaleen sijainnin täytyy, ettei mentäisi kovin suurelle vaikeustasolle, asettua yleensä niin, että sen jakaminen erinomaisen ohuisiin suoriin lieriöihin tapahtuu tasoleikkauksin, jotka ovat kohtisuorassa x-akselia vastaan, ja kunkin poikkileikkauskuvion ala tunnetaan x:n jatkuvana funktiona.



Kuvaan on yritetty hahmotella epämääräisen muotoinen “putki”, jota on leikattu x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla paikoissa a, x ja b. Kun tällaisia yhdensuuntaisia tasoja asetetaan hyvin lähelle (etäisyys tasosta seuraavaan on aina dx) toisiaan, niin voidaan ehkä ymmärtää kolmiulotteisen kappaleen syntyminen päällekkäin pinotuista lieriöistä, joiden yhteenlaskettu tilavuus on kyseisen pinnan rajoittaman avaruuden osan (kappaleen) tilavuus. Tämä tilavuus voidaan sitten määrittää raja-arvona, missä tasojen välinen etäisyys dx lähenee rajattomasti nollaa ja siten

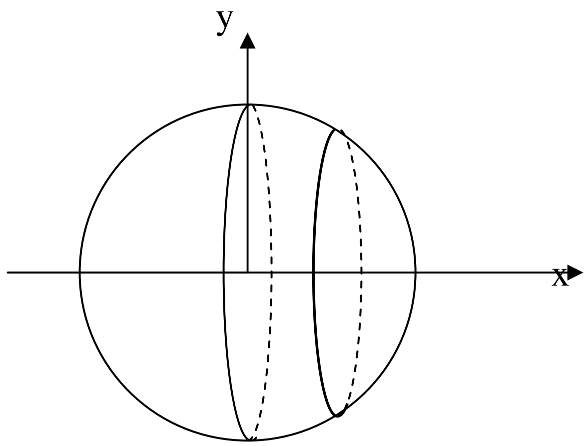
$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Oleellisinta tässä tilavuuden määrityksessä on se, että tulee tietää jokaisella x:n arvolla välillä [a, b] sen pinnan ala, joka syntyy leikatessa kappaletta x-akselia vastaan kohtisuoralla tasolla. Helpoin näistä tapauksista lienee se, missä x-akselin, suorien x =a ja x = b sekä funktion y = f(x) kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri. Tällöin millä tahansa x:n arvolla poikkileikkauskuvio on y-säteinen ympyrä, jonka ala $A(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$, ja ns. pyörähdyskappaleen tilavuus

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Esim. 32. Määritä R-säteisen pallon tilavuus.

Pallopinta on avaruuden niiden pisteiden ura, jotka kaikki ovat säteen R etäisyydellä kiinteästä pisteestä. Helpointa on laskea origokeskeisen pallon tilavuus. Tällaisen pallon voidaan ajatella syntyvän origokeskeisen ympyrän $x^2 + y^2 = R^2$ pyörähtäessä x-akselin ympäri (tässä riittää pyörähtää vain puoli kierrosta).



Pallo alkaa sieltä, missä ympyrä kohtaa negatiivisen x-akselin ja päättyy sinne, missä se kohtaa positiivisen x-akselin. Integroimisväli on täten [-R,R]

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \pi \Big/_{-R}^{R} (xR^2 - \frac{x^3}{3}) =$$

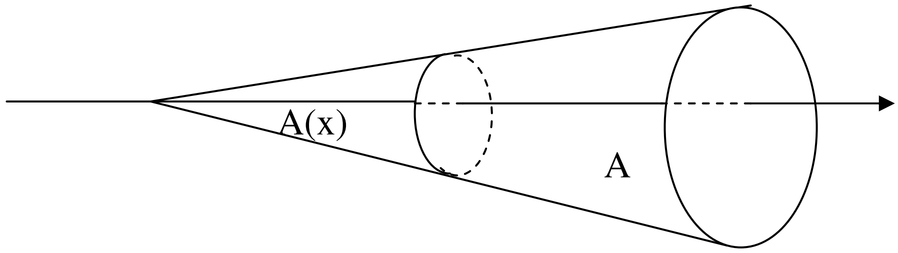
$$= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right] = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right] =$$

$$= \pi \left[2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right] = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Merkillistä tai ei, pallon tilavuuden määritys integroimalla on paljon helpompi kuin ympyrän pinta-ala määrätyn integraalin avulla!!

Esim. 33. Osoita, että kartion tilavuus on pohjan alan ja korkeuden kolmannes.

Kartio**pinnan** voidaan ajatella syntyvän siten, että yhdestä pisteestä paikoillaan pysyvän suoran jokin toinen piste kiertää jonkin suljetun (taso)käyrän ympäri. Parasta olisi, jos kiinteä piste ei kuuluisi tämän käyrän määräämään tasoon. Itse kartio syntyy sitten leikattaessa kartiopintaa tasolla. Kiinteästä pisteestä tasolle piirretty normaali määrää kartion korkeuden. Erikoisesti puhutaan suorasta ympyräkartiosta silloin, kun korkeusjana kulkee pohjaympyrän keskipisteen kautta, mutta täytyy huomata, että kartion pohjan ei suinkaan tarvitse olla ympyrä. Se voi olla yhtä hyvin kolmio, kuusikulmio, ellipsi tai vaikka puoliympyrä.



Kartion tilavuuden määrityksessä tarvitaan kuitenkin sitä geometrista tosiasiaa, että yhdenmuotoisten pintojen alojen suhde on mittakaavan neliö.

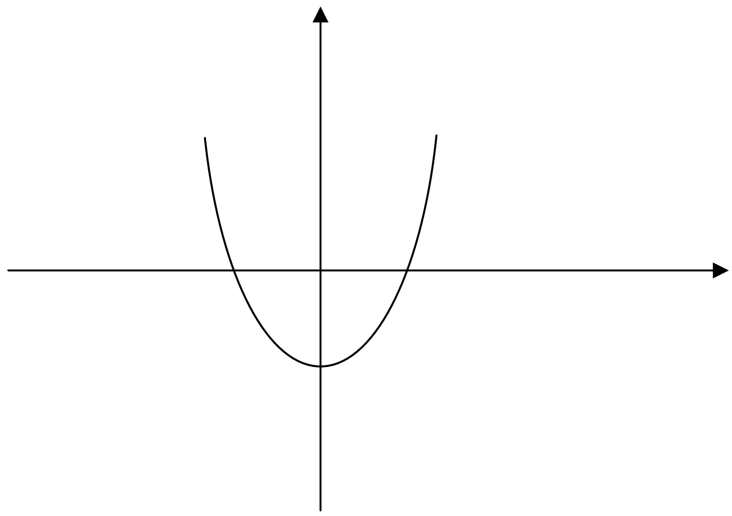
Olkoon kartion huippu origossa, jolloin sen pohjan jokaisen pisteen x-koordinaatti = h = kartion korkeus. Olkoon kartion pohjan ala A. Kuvaan on hahmoteltu eräs poikkileikkaus kohtaan x ja olkoon sen ala A(x). Tuosta mainitusta geometrisesta tosiasiasta ja siitä että A(x) on yhdenmuotoinen A:n kanssa mittakaavassa x : h seuraa verranto

$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Leftrightarrow A(x) = \frac{Ax^2}{h^2},\ \text{ja}$$

$$V = \int_0^h A(x)dx = \int_0^h \frac{Ax^2}{h^2} = \frac{A}{h^2} \Big/_0^h \frac{x^3}{3} = \frac{Ah^3}{3h^2} = \frac{Ah}{3}.$$

Tulos on yleinen ja koskee siis minkälaista kartiota tahansa. Muun muassa pyramidit ovat kartioita.

Esim. 34. Paraabelin $y = x^2 - 1$ ja x-akselin rajoittama pinta pyörähtää x-akselin ympäri. Kuinka suuri on syntyvän kappaleen tilavuus.



Jokaisella x:n arvolla sanotun pyörähdyskappaleen ja x-akselia vastaan kohtisuoran tason leikkaus on $|y|$ – säteinen ympyrä, jonka ala on πy^2. Pyörähdyskappale alkaa paikasta $x = -1$ ja päättyy, kun $x = 1$. Siten kysytty tilavuus

$$V = \pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2\,dx = \pi\int_{-1}^{1} y^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx =$$

$$= \pi \Big/_{-1}^{1}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+1\right) = \pi\left[\frac{1^5}{5}-\frac{2\cdot 1^3}{3}+1-\left(\frac{(-1)^5}{5}-\frac{2(-1)^3}{3}+(-1)\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right] = \frac{16\pi}{15}$$

Pyörähdyskappaleen tilavuus on $\frac{16\pi}{15}$ tilavuuden yksikköä.

Esim. 35. Paraabeli $y = x^2 - 1$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun näin syntyvää kappaletta, pyörähdysparaboloidia leikataan tasolla, joka on y-akselin normaalitaso, niin mikä on tämän tason yhtälö, jotta syntyvän pikarinmuotoisen astian tilavuus olisi 200 kuutiosenttimetriä? Olkoon koordinaatistossa yksikköjanan pituus senttimetrin.

Kun käyrä pyörähtää y-akselin ympäri, niin sanotun pyörähdyskappaleen ja y-akselia vastaan kohtisuoran tason leikkaus on $|x|$–säteinen ympyrä, jonka ala on πx^2. Tässä probleemassa tilavuus tiedetään, mutta integraalin yläraja on tuntematon. Kappalehan alkaa paikasta $y = -1$.

$$V = 200 = \pi\int_{-1}^{y} x^2 dy = \pi\int_{-1}^{y}(y+1)dy = \pi\Big/_{-1}^{y}\left(\frac{y^2}{2}+y\right) = \pi\left[\frac{y^2}{2}+y-\left(\frac{(-1)^2}{2}-1\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{y^2}{2}+y+\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{400}{\pi} = y^2+2y+1 \Leftrightarrow y^2+2y+1-\frac{400}{\pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1-1+\frac{400}{\pi}} \Leftrightarrow y = -1 \pm \frac{20}{\sqrt{\pi}}$$

Juurista toinen taitaa olla negatiivinen, vieläpä pienempi kuin $y = -1$ kuuluen alueeseen, jossa pikaria ei edes ole. Siten vain positiivinen juuri kelpaa ja sen likiarvo on 28…

Saa siten juoda hienoja aineita pikarista, jonka sisäkorkeus on noin 11,3 cm. Pikarissa on tietysti myös jalka, koska ei pyörähdysparaboloidi saata pysyä ainakaan itsekseen pystyssä.

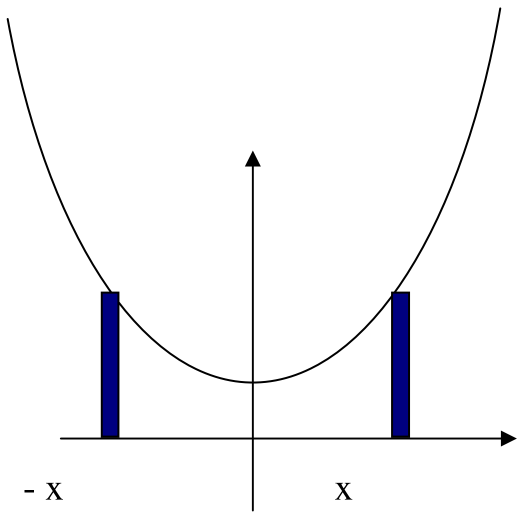
Lienet pannut merkille, että määrätyn integraalin laskeminen on joskus vähän työlästä puuhaa. On kuitenkin olemassa eräs helpotus, joka koskee integraalia yli sellaisen välin, jonka keskipisteenä on origo, siis esimerkiksi integraalia $\int_{-a}^{a} f(x)dx$. Puhutaan origon suhteen symmetrisestä välistä.

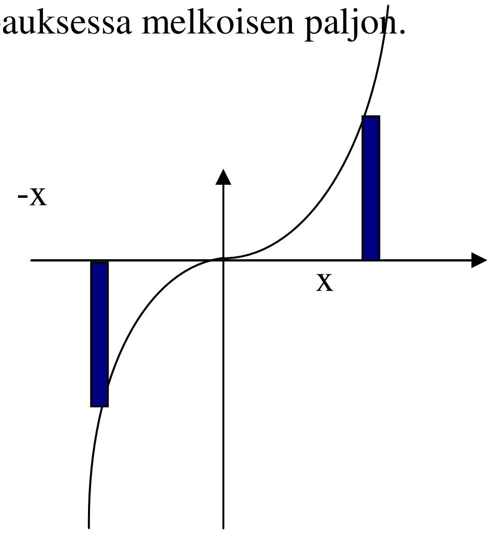
Miten tätä sitten sovelletaan, riippuu integroitavasta funktiosta. Menetelmä ei suinkaan sovi kaikenlaisille funktioille, vaan soveltaminen käy ainoastaan ja vain, jos funktio on joko **parillinen** tai **pariton**.

Funktio on parillinen, jos vastaluvut antavat sille saman arvon: f(x) = f(–x). Parillisen funktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen.

Funktio on pariton, jos vastaluvut antavat sille vastalukuarvot; f(–x) = –f(x). Parittoman funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen. Origo on toisin sanoen pisteitä (–x, f(–x)) ja (x, f(x)) yhdistävän janan keskipiste.

Kun muistetaan, että määrätty integraali on erään summan raja-arvo, niin origon suhteen symmetrisen välin [–a, a] kyseessä ollen tässä summassa on termejä, joiden käsittely helpottuu funktion symmetriaominaisuuksien nojalla, ja helpottuu erikoisesti parittoman funktion tapauksessa melkoisen paljon.





Vasemmanpuoleisessa kuvassa (parillinen funktio) on kaksi määrättyä integraalia kuvaavaan summaan kuuluvaa termiä geometrisesti hahmotettu. Näissä kummassakin pinta-alatulkinnan mukaan ovat funktion arvo kerrottuna osavälin pituudella keskenään yhtä suuret, ja oikeanpuoleisessa kuvassa taas (pariton funktio) ovat vastaavat tulot toistensa vastalukuja, koska funktion arvot ovat vastalukuja keskenään. Välin [–a, a] jaossa tasaväliseen jakoon kuuluvassa summassa on termejä origon molemmin puolin yhtä monta edellyttäen, että origo on yksi jakopiste. Parittoman funktion tapauksessa kaikki termit yhteenlaskussa pareittain kumoavat toisensa ja parillisen funktion tapauksessa riittää integroida pelkästään yli välin [0,a] ja kertoa tulos kakkosella.

****
Lause 18. Olkoon a positiivinen luku.

Jos funktio f on parillinen, toisin sanoen jos f(x) = f(–x), niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Jos funktio f on pariton, toisin sanoen jos f(x) = –f(–x), niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

****

Tulee huomata, ensiksikin se, että ellei integrointiväli on symmetrinen origon suhteen, esitettyä lausetta ei juuri kannata tarjoilla. Toisekseen tulee huomata, että läheskään kaikki funktiot eivät kuulu parittomiin tai parillisiin. Määrätyn integraalin additiivisuuden vuoksi (sehän on erään summan raja-arvo) on ehkä mahdollista jakaa integroitava funktio osiin ja integroida niitä kutakin osaa erikseen.

Esim. 36. $\int_{-18}^{18} \left(e^{4x} + x^3 + x^2 + \sin x + \cos x - 44\right)dx$

Integroitavassa funktiossa $x^2 + \cos x - 44$ on parillinen osa, $x^3 + \sin x$ on pariton osa, mutta e^{4x} ei ole kumpaakaan. Helpotusta saadaan näin:

$$\int_{-18}^{18} \left(e^{4x} + x^3 + x^2 + \sin x + \cos x - 44\right)dx =$$

$$= \int_{-18}^{18} e^{4x}\,dx + \int_{-18}^{18} (x^3 + \sin x)dx + \int_{-18}^{18} (x^2 + \cos x - 44)dx =$$

$$= \int_{-18}^{18} e^{4x}\,dx + 0 + 2\cdot \int_{0}^{18} (x^2 + \cos x - 44)dx.$$

Esimerkki oli sangen teoreettinen, mutta saattaa tulla käytäntöä vastaasi pinta-ala- ja tilavuussovellutuksissakin ja miksei aivan hyvin myös raaoissa määrätyn integraalin laskuissa.