12. ARKISIA SOVELLUKSIA

Oletetaan, että kappale liikkuu yksiulotteista rataa, esimerkiksi x-akselia pitkin. Kappaleen nopeuden vektoriluonne riittää ottaa vauhdin etumerkin avulla huomioon, ja on ehkä tarkoituksenmukaisinta sopia, että jos kappaleen paikka-koordinaatti kasvaa, sen vauhti on positiivista. Olkoon ajanhetkellä t kappale paikassa x(t) ja ajanhetkellä t + h (h voi olla negatiivinenkin) paikassa x(t + h). Lauseke

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

antaa kappaleen keskimääräisen vauhdin aikavälillä [t, t + h] ja raja-arvo

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

antaa puolestaan kappaleen hetkellisen vauhdin kellon ollessa täsmälleen t. Voidaan siis uskoa, ehkäpä ymmärtääkin, että kappaleen vauhti on sen paikkaa ilmaisevan funktion x(t) derivaatta. Niin sanotussa korkeammassa matematiikassa (fysiikassa), missä otetaan nopeuden vektoriluonne paremmin huomioon, sanotaan nopeuden olevan kappaleen paikkavektorin $\vec{r}$ aikaderivaatta

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t)$$

Kun ryhdytään ajattelemaan asiaa toisin päin, voidaan analogisesti pinta-ala-asioiden kanssa päätyä siihen tulokseen, että jos kappaleen nopeus ajan funktiona tunnetaan, niin kappaleen paikkakoordinaatti liittyy varmasti nopeuden integraali-funktioon.

Kappaleen nopeuden (vauhdin, liike yhdessä dimensiossa) muuttumista luonnehditaan sanomalla, että kappaleella on kiihtyvyyttä (acceleration). Lausekkeista

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} \quad \text{ja} \quad \lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

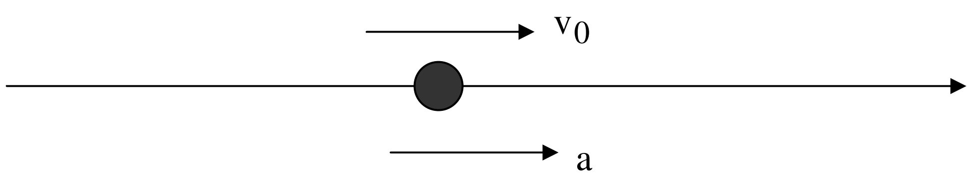
edellinen antaa kappaleen keskimääräisen kiihtyvyyden ajassa h ja jälkimmäinen hetkellisen kiihtyvyyden, kun kello on tasan t. Siten kiihtyvyys on nopeuden aika-derivaatta ja samalla paikkakoordinaatin derivaatan derivaatta

$$\vec{a}(t) = \vec{v}' = \vec{x}''(t).$$

Yksiulotteisessa liikkeessä sanotut yhtälöt voidaan esittää ilman vektorimerkkejä.

Jos kappaleen kiihtyvyys tunnetaan, niin on ilmeistä, että sen vauhti on likeisessä yhteydessä kiihtyvyyden integraalifunktioon. Oleellista näissä ”liike-asioissa” on se, että täytyy tuntea jonkin suureen aikariippuvuus matemaattisen täsmällisesti. Käytetäänkö käytännön laskutehtävissä nyt sitten integraalifunktiota vai määrättyä integraalia, on paljolti samantekevää. Osin asia selvinnee seuraavasta esimerkistä.

Esim. 37. Kappale on ajanhetkellä $t_0 = 0$ [s] x-akselin pisteessä x_0 [m], sen vauhti on v_0 x-akselin positiiviseen suuntaan ja kappaleen kiihtyvyys on vakio a > 0. Määritä kappaleen vauhti ja paikkakoordinaatti ajanhetkellä t.



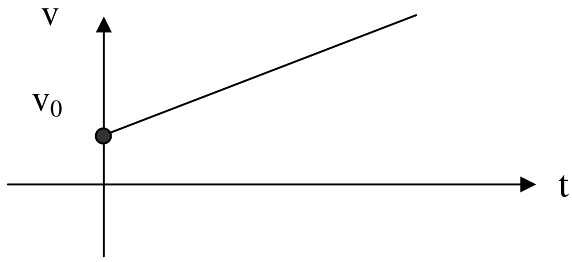
Kiihtyvyyden kuvaaja on siten oheisen näköinen

Koska kiihtyvyys on vauhdin (nopeuden) derivaatta, niin

$$v(t) = \int a\,dt = at + C$$

Integroimisvakio kiinnittyy nyt siitä ehdosta, että $v(0) = v_0$

$$v(0) = a \cdot 0 + C \Leftrightarrow C = v_0 \quad \text{ja siten}$$
$$v(t) = v_0 + at$$



Koska vauhti (nopeus) on paikan derivaatta, niin

$$x(t) = \int (v(t)dt = \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C_1.$$

Integroimisvakio kiinnittyy nyt siitä ehdosta, että $x(0) = x_0$ eli sijoitus antaa, jotta $C_1 = x_0$ ja

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

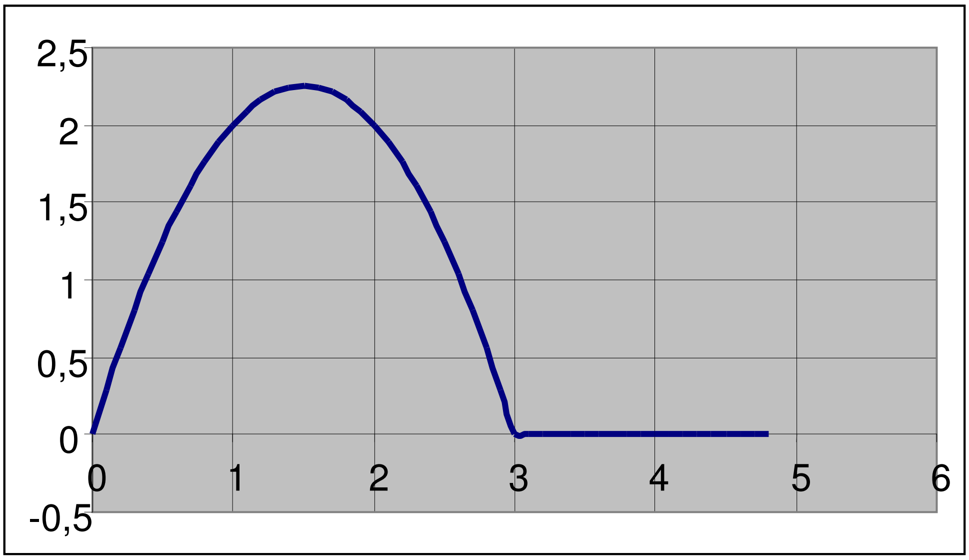
Saadut kaavat ovat fyysikoille tuttuja, ja soveltuvat tasaisesti kiihtyvän liikkeen probleemoiden ratkaisemiseen.

Esim. 38. Kappale on ajanhetkellä $t_0 = 0$ [s] x-akselin pisteessä 16 [m], sen vauhti $v(0) = -2.5$ m/s, siis x-akselin negatiiviseen suuntaan. Kappaleen kiihtyvyys noudattaa seuraavaa funktiota:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{3m}{s^3} \cdot t - \frac{m}{s^4} \cdot t^2, 0 \le t < 3\,s \\ 0, \quad 3\,s \le t \le 10\,s \end{cases}$$

Määritä kappaleen vauhti ja paikkakoordinaatti ajanhetkellä t. Piirrä kaikista niistä kuvaajat ja piirrä myös kiihtyvyysfunktion kuvaaja.

Kiihtyvyys ajan funktiona



$$v(t) = \int a\,dt$$

$$v(t) = \begin{cases} \int (\frac{3m}{s^3} \cdot t - \frac{m}{s^4} \cdot t^2)dt, 0 \le t < 3\,s \\ C_2, \quad 3\,s \le t \le 10\,s \end{cases} = \begin{cases} \frac{3m \cdot t^2}{2s^3} - \frac{m \cdot t^3}{3s^4} + C_1, 0 \le t < 3\,s \\ C_2, \quad 3\,s \le t \le 10\,s \end{cases}$$

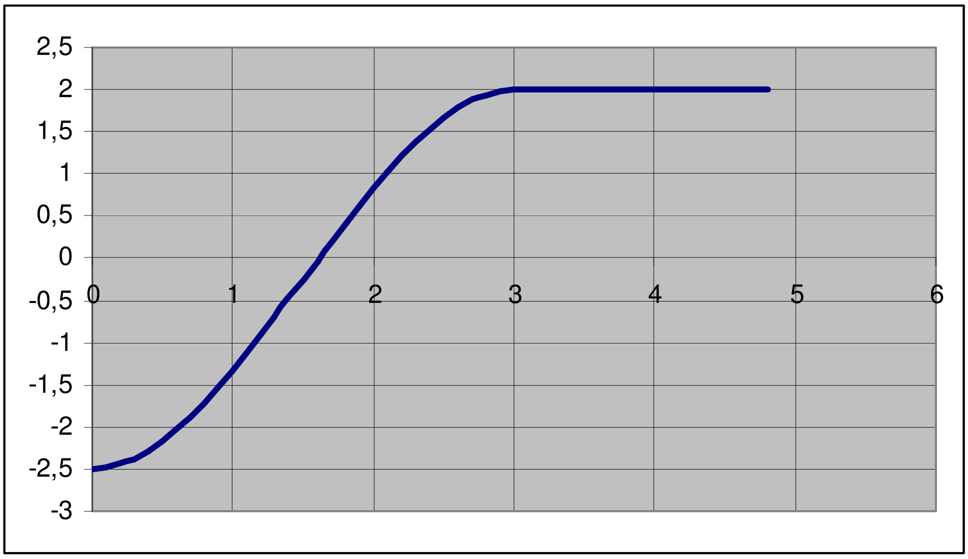
Integroimisvakio C_1 kiinnittyy nyt siitä ehdosta, että v(0) = – 2.5 m/s. Huomataan heti, että C_1 = – 2.5 m/s. Tämä tieto sitoo nyt vauhdin aika-välillä 0 … 3 s, ja erityisesti

$$v(3\,s) = \frac{3m \cdot (3s)^2}{2s^3} - \frac{(3s)^3}{3s^4} - 2.5\frac{m}{s} = 2\,m/s$$

ja tämä tieto puolestaan määrää heti sen, että C_2 = 2 m/s, koska vauhdin v(t) tulee olla jatkuva funktio.

$$v(t) = \begin{cases} \frac{3m \cdot t^2}{2s^3} - \frac{m \cdot t^3}{3s^4} - \frac{2.5m}{s}, 0 \le t < 3\,s \\ 2\frac{m}{s}, \quad 3\,s \le t \le 10\,s \end{cases}$$

Kappaleen vauhti ajan funktiona



Kuvaajaa ei ole jatkettu (tilan säästämiseksi) 10 sekuntiin saakka, mutta jos piirrettäisiin, vaakasuorana se jatkuisi, ja sen arvo olisi v = 2 m/s.

$$x(t) = \int (v(t)dt = \begin{cases} \int (\frac{3m \cdot t^2}{2s^3} - \frac{m \cdot t^3}{3s^4} - \frac{2.5m}{s})dt, & 0 \le t < 3\,s \\ \int 2\frac{m}{s}, & 3\,s \le t \le 10\,s \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{m \cdot t^3}{2s^3} - \frac{m \cdot t^4}{12s^4} - \frac{2.5t \cdot m}{s} + C_{3,} & 0 \le t < 3\,s \\ 2t\frac{m}{s} + C_4, & 3\,s \le t \le 10s \end{cases}$$

Integroimisvakio C_3 kiinnittyy siitä ehdosta, että x(0) = 16 m. Huomataan taas helposti, että C_3 =16 m. Tämä tieto sitoo kappaleen paikan aikavälillä 0 … 3 s, ja erityisesti

$$x(3s) = \frac{m \cdot (3s)^3}{2s^3} - \frac{m \cdot (3s)^4}{12s^4} - \frac{2.5 \cdot 3s \cdot m}{s} + 16m = 15.25m.$$

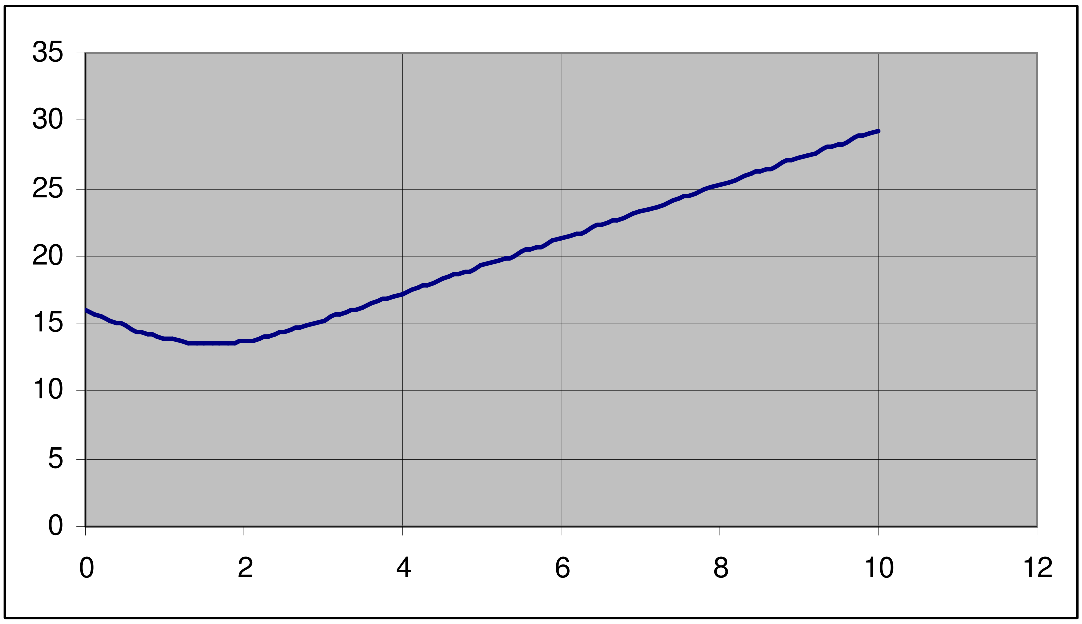
Funktion x(t) tulee olla jatkuva, ja täten (vaikka ei täsmällisiä raja-arvotarkasteluja suoritettaisikaan),

$$2 \cdot 3s \cdot \frac{m}{s} + C_4 = 15.25\,m \Leftrightarrow C_4 = 9.25\,m$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{m \cdot t^3}{2s^3} - \frac{m \cdot t^4}{12s^4} - \frac{2.5t \cdot m}{s} + 16\,m, & 0 \le t < 3\,s \\ 2t\frac{m}{s} + 9.25\,m, & 3\,s \le t \le 10s \end{cases}$$

Tässä kaikki dimensiotarkastelut (siis suureiden laadut, yksiköt) on käsitelty varsin perusteellisesti.

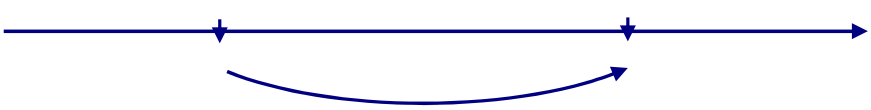
Paikkakoordinaatin aikariippuvuus seuraavalla sivulla.



Esim. 39. Funktio f määritellään yhtälöllä $f(x) = \int_0^2 |x-t|dt$. Piirrä funktion f kuvaaja ja esitä sen lauseke integroidussa muodossa.

Tässä tehtävässä tilanne on sellainen, että integroimismuuttuja juoksee aina välin 0 … 2. Integroitavaa funktiota on käsiteltävä erikseen kolmessa osassa sen mukaan, onko x < 0, tai onko se > 2 taikka kuuluuko se välille [0, 2]. Normaali itseisarvojen poistaminen täytyy aina tehdä heti aluksi:

$$|x-t| = \begin{cases} x-t, \text{ kun } x \geq t \\ t-x, \text{ kun } x < t. \end{cases}$$



Olkoon x < 0. Tällöin koko integroimisvälillä t > x ja

$$f(x) = \int_0^2 |x-t|dt = \int_0^2 (t-x)dt = \Big/_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - xt\right) = 2 - 2x$$

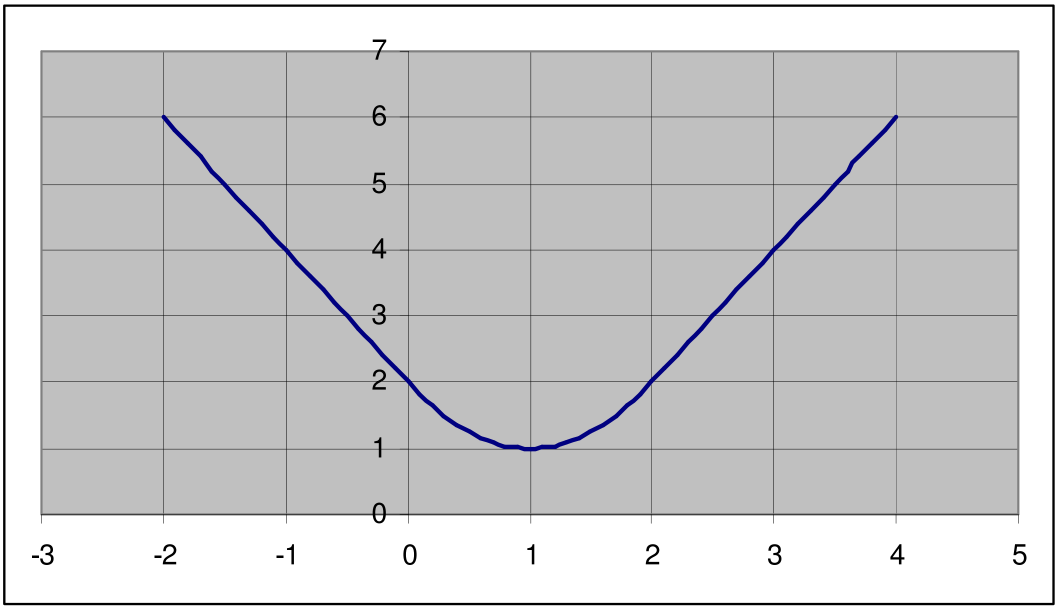
Olkoon $0 \le x < 2$. Tällä välillä on pisteeseen x saakka $t < x$ ja tästä kakkoseen saakka on $t > x$:

$$f(x) = \int_0^2 |x - t|dt = \int_0^x (x - t)dt + \int_x^2 (t - x)dt =$$

$$= \Big/_0^x (xt - \frac{t^2}{2}) + \Big/_x^2 (\frac{t^2}{2} - xt) = 2 - 2x + x^2$$

Olkoon $x \ge 2$. Tällöin koko integroimisvälillä on $x \ge t$ ja

$$f(x) = \int_0^2 |x - t|dt = \int_0^2 (x - t)dt = \Big/_0^2 (xt - \frac{t^2}{2}) = 2x - 2.$$



Esim. 40. Funktio f määritellään yhtälöllä $f(x) = \int_1^x xg(t)dt$, missä g on kaikkialla derivoituva funktio. Määritä $f'(x)$ ja $f''(x)$.

Kyseessä on hivenen teoreettinen tapaus, joka vaatii ymmärrystä siitä, että kun määrätty integraali käsitettynä ylärajansa (yksinkertaiseksi) funktioksi derivoidaan, saadaan asia ilmaistua esimerkin avulla seuraavasti:

$$h(x) = \int_a^x r(t)dt \Rightarrow h'(x) = r(x)$$

Tämä asia on teoreettisesti johdettu sekä pinta-alanfunktion yhteydessä, että yleisemminkin. Tehtävän esimerkissä f(x) = $\int_1^x xg(t)dt$ integroimismuuttuja juoksee välin 1 … x, mutta koska muuttuja x esiintyy myös itse integraalissa, funktiota h(x) koskevaa tulosta ei voi käyttää suoraan. Integroinnin kannalta nyt kuitenkin muuttuja x on vakio ja se voidaan tuoda integraalimerkin eteen (niin usein kuin on varoitettukin, ettei x:n lauseketta missään tapauksessa saa kuljetella takaa eteen eikä edestä taakse). On sangen suuri ero siinä, päättyykö integrointikäsky symboliin dx vai dt. Siis

$$f(x) = \int_1^x xg(t)dt = x \cdot \int_1^x g(t)dt\,.$$

Kyseessä on siis muuttujan x ja integraalin tulo, joka derivoidaan normaalisti tulon derivointikaavaa käyttäen:

$$f(x) = x \cdot \int_1^x g(t)dt \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \int_1^x g(t)dt + x \cdot g(x) \quad ja$$

$$f''(x) = g(x) + x \cdot g'(x) + g(x) = 2g(x) + x \cdot g'(x)$$