13. EPÄOLEELLISET INTEGRAALIT

Nimitys viittaa määrättyihin integraaleihin, joissa integroimisrajoista ainakin toinen voi olla $\pm\infty$, taikka itse integroitava funktio ei ole integroimisvälillä rajoitettu. Integraalilla saattaa silti olla äärellinen arvo.

Esim. 41. Tutki, onko $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ äärellisenä olemassa.

Käytännössä tällaiset integraalit lasketaan normaalia sijoitusmenettelyä noudatellen korvaamalla aluksi rajoittamaton ala- tai yläraja jollakin vakiolla ja antamalla lopuksi tämän luvun lähestyä kyseistä rajaa. Siis

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{dx}{x^2} = \lim_{k\to\infty} \Big/_{1}^{k} -\frac{1}{x} = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{1}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Integraali on siis äärellisenä olemassa eikä ole lukuarvoltaan edes kovin suuri.

Esim. 42 Tutki, onko $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ äärellisenä olemassa.

Tässä esimerkissä integroitava funktio ei ole origossa edes määritelty. Kuinkahan itse integraalin olemassaolon käy.

$$\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+} \int_a^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+} \Big/_{a}^{4} 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{a\to 0+} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{a}) = 2\cdot 2 - \lim_{a\to 0+} 2\sqrt{a} = 4$$

Käsitellyissä esimerkeissä integraaleilla oli äärellinen arvo. Parin esimerkin ei tule kuitenkaan antaa johtaa harhaan. Kokeilepa vaikka integraaleja $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ tai $\int_0^{6} \frac{dx}{x^2}$.