MAA10 HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1. Määritä se funktion f: $f(x) = x^2 + 2x$ integraalifunktio, jolle $F(3) = 4$.
2. Määritä se funktion f : $f(x) = 2x$ integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = x$.
3. Integroi: a) $\int x^3 dx$ b) $\int \frac{dx}{x^3}$ c) $\int \sqrt{x}dx$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
4. Määritä $\int (4x^3 + 3x^2 + 8x + a)dx$.
5. $\int (2x + 3)^2 dx$.
6. Määritä funktion f: $f(x) = \cos x - 2 \sin x + 3e^x$ integraalifunktioista se, joka kulkee origon kautta.
7. Määritä funktion f integraalifunktioista se, joka käy paraabelin $y = x^2 + 4x + 5$ huipun kautta: $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3x$.
8. a) $\int (2x - 4t)dx$ b) $\int (2x - 4t)dt$ c) $\int (2x - 4t)dz$
9. Määritä $\int (x + |x|)dx$. Mikä integraalifunktioista kulkee pisteen (1, 3) kautta?
10. Määritä $\int x\sqrt{1 - x^2}dx$. Millä x:n arvoilla integraalifunktio on määritelty?
11. Määritä $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1 - x^2}}$.
12. Määritä $\int \frac{2e^x dx}{3 + 2e^x}$.
13. a) $\int (x^2 - 4x)^2 dx$ b) $\int (2x - 4)(x^2 - 4x)^2 dx$ c) $\int (x^2 - 4x)^2 dt$.
14. Määritä $\int (1 - x)\sqrt[3]{x}dx$.
15. Määritä a) $\int \sin x \cos x dx$ b) $\int (\tan^2 x + 2)dx$

16. Olkoon $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ x, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$. Määritä ensin yleisesti $\int f(x)dx$ ja sen jälkeen funktion f se integraalifunktio, joka kulkee pisteen (2,3) kautta. Tulee kiinnittää erityistä huomiota funktion F jatkuvuuteen pisteessä x =1.

17. $\int (3e^{2x} - e^{-x})dx$

18. 18. $\int (\sin 2x - 2\cos\frac{x}{2})dx$

19. Määritä (osittaisintegrointi) $\int x \sin x dx$.

20. Määritä (osittaisintegrointi) $\int x^2 \sin x dx$.

21. Määritä (osittaisintegrointi) $\int x \ln x dx$.

22. Määritä $\int \sin^2 xdx$. (keinona on kaksikertaisen kulman kosinin avulla muuntaa integroitava funktio ensin muotoon $\sin^2 dx = ½(1 - \cos 2x)$.

23. Määritä $\int \frac{x}{e^x} dx$. (osittaisintegrointi).

24. Näytä oikeaksi osittaisintegrointia käyttäen, että $\int fg'' dx = fg' - f'g + \int f''g dx$.

25. Määritä $\int e^x \cos x \, dx$. (osittaisintegrointi, kaksi peräkkäistä, jolloin päädyt etsityn integraalin sisältävään yhtälöön).

26. Määritä $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x - 1} dx$. (Vihje: $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$).

27. Määritä $\int \frac{x-1}{x+1} dx$. (Vihje: $x - 1 = x + 1 - 2$).

28. Määritä $\int \frac{dx}{3x^2 - 12}$. Vihje: osamurtoihin jako luentoesimerkin tapaan)

29. Määritä $\int \frac{6x}{x^2 - 9} dx$. Vihje: osamurtoihin jako $\frac{x}{x^2 - 9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$.

30. Määritä sen tasoalueen pinta-ala, jota rajoittavat x-akseli, suorat $x = -2$ ja $x = 1$ sekä paraabeli $y = x^2 + 2x + 2$.

31. Määritä paraabelin $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ ja x-akselin rajoittaman äärellisen tasoalueen pinta-ala.

32. Funktion $y = \sin x$ kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella mm. välillä $[0, \pi]$. Laske sen silmukan muotoisen alueen ala, jonka tämä kuvaaja yhdessä x-akselin kanssa sanotulla välillä rajaa.

33. Laske sen tasoalueen ala, jota rajoittavat x-akseli, funktion $y = x^3$ kuvaaja ja suora $x = 2$.

34. Osoita, ettei paraabelilla $y = 2x^2 + x$ ja suoralla $y = 2x - 1$ ole yhteisiä pisteitä. Laske sen tasoalueen ala, joka jää tämän paraabelin ja mainitun suoran sekä suorien $x = 1$ ja $x = 2$ väliin. (Tämä ala voidaan laskea kahden alan erotuksena).

35. Laske seuraavat integraalit:

a) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$ b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int_3^6 \frac{dx}{x}$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}x)\,dx$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

36. Määritä määrätyn integraalin väliarvolauseessa oleva luku ξ, kun integroitava funktio $f(x) = x^2$ ja integroimisväli on $[a, b]$, $a < b$.

37. Laske $\int_{-2}^{3} f(x)dx$, kun $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } -2 \le x < 0 \\ 2x, & \text{kun } 0 \le x \le 3 \end{cases}$. Piirrä f:n kuva.

38. Käyrä $y = \cos x$ välillä $[0, 2\pi]$ rajoittaa yhdessä koordinaattiakseleiden ja suoran $x = 2\pi$ kanssa kolmiosaisen alueen, jonka osista kaksi on x-akselin ylä- ja yksi, keskimmäinen, alapuolella. Laske sen pinta-ala.

39. Käyrä $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ rajoittaa yhdessä x-akselin kanssa kaksiosaisen alueen, joista toinen on x-akselin ylä- ja toinen alapuolella. Laske sen pinta-ala. Piirrä funktion $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ kuvaaja pääpiirtein.

40. Määritä suoran $y = x + 2$ ja paraabelin $y = 4 - x^2$ rajoittaman tasoalueen pinta-ala. Piirrä pääpiirtein sellainen kuva, josta näkyy rajakäyrien keskinäinen sijainti.

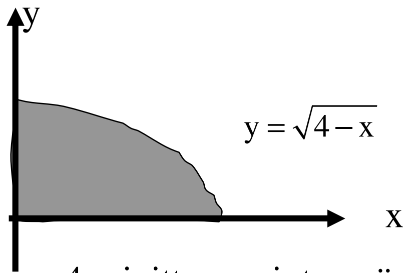
41. Piirrä paraabeli $4x = y^2$. Määritä sitten tämän paraabelin ja suoran $x = 4$ rajoittaman tasoalueen pinta-ala.

42. Laske käyrien $y = x^2$ ja $y = x^3$ rajoittaman tasoalueen ala. (1/12)

43. Suora $y = x - 2$ jakaa käyrän $y = (x - 2)(6 - x)$ ja x-akselin välisen alueen kahteen osaan. Laske pienemmän ja suuremman alan suhde. (27:37)

44. Positiivisten koordinaattiakseleiden ja käyrän $y = \sqrt{4 - x}$ rajoittama pinta pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus. (8π)

45. Tehtävän 44 pinta pyörähtää y-akselin ympäri. Mikä on syntyvän kappaleen tilavuus tällöin? ($\frac{256\pi}{15}$)



46. Paraabelin $y = \frac{x^2}{4}$, y-akselin ja suoran y = 4 rajoittama pinta pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus. ($\frac{256\pi}{5}$)

47. Funktion y = sin x + cos x kuvaajan välillä $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

48. Kappaleen pohja on origokeskeinen, R-säteinen ympyrä. Kun kappaletta leikataan x-akselia vastaan kohtisuoralla tasolla, leikkauskuvio on aina tasasivuinen kolmio. Laske kappaleen tilavuus. ($\frac{4R^3\sqrt{3}}{3}$)

49. Olkoon funktio $f(x) = \int_a^x xt^2 dt$. Muodosta derivaatat $f'(x)$ ja $f''(x)$.

50. Pikkuruinen kappale voi liikkua pitkin x-akselia. Tiedetään, että sen vauhti noudattaa jokseenkin tarkoin yhtälöä

$$v(t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t,$$

missä ajan yksikkö [t] = sekunti. Tiedetään myös, että kappaleen paikkakoordinaatti x(0) = 8.0 m.

a. Mikä on vauhdin suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq t \leq 18$ s. Piirrä funktion v kuvaaja ko. välillä.
b. Määritä yleisesti kappaleen paikkakoordinaatin antava yhtälö x(t) tällä aikavälillä? Missä pisteessä kappale on hetkellä t = 18 s.
c. Piirrä kappaleeseen kiihtyvyyden kuvaaja välillä $0 \leq t \leq 18$ s.

51. Työ kaikkein yksinkertaisimmassa fysiikan tilanteessa on voiman ja matkan tulo W = Fs, mutta tämä pätee vain silloin, kun voima on vakio ja lisäksi siirtymän s kanssa samansuuntainen. Näin on esimerkiksi silloin, kun kappale liikkuu pitkin x-akselia ja voima on x-akselin suuntainen; sallitaan tietenkin negatiivinen voima, jonka vektoriluonne otetaan etumerkillä huomioon. Jos voima on muuttuva, ei työtä voida laskea suoraan annetun kaavan nojalla vaan on käytettävä integraalilaskentaa. On kuitenkin tunnettava voiman paikkariippuvuus.
Kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima F siirtää kappaleen origosta s-akselin pisteeseen 4, ja voiman paikkariippuvuus $F(s) = 6\sqrt{s}$ ollen voima

koko ajan s-akselin suuntainen. Kuinka suuren työn voima tekee? (Kun tässä s on annettu metreinä ja voima Newtoneina, työn yksiköksi tulee joule)

52. Käyrän $y = \frac{1}{x}$, suorien $x = 1$, $x = k$ ($k > 0$) rajoittama pinta pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus. Mitä raja-arvoa tämä tilavuus lähenee, kun a) $k \to \infty$ b) $k \to 0$?