MAA10 HARJOITUSTEN RATKAISUJA

1. $f(x) = x^2 + 2x$, jolloin kaikki integraalifunktiot saadaan parvesta $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$, ja kun F(3) = 4, niin integroimisvakion määräämiseksi saadaan yhtälö $\frac{3^3}{3} + 3^2 + C = 4 \Leftrightarrow C = 4 - 9 - 9 \Leftrightarrow C = -14$.

   Kysytty integraalifunktio on siten $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 14$.

2. Funktion f: f(x) = 2x integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) = x^2 + C$, mutta mitä tarkoittaa sanonta ”integraalifunktion kuvaaja sivuaa suoraa y = x”? Sanonta ”sivuaa” viittaa siihen, että suora y = x olisi integraalifunktion tangentti. On kyse siitä, että tulee löytää integraalikäyrältä sellainen piste, jossa tangentin kulmakerroin on yhtä kuin suoran y = x kulmakerroin eli ykkönen. Siis missä pisteessä integraalikäyrän derivaatta F´(x) = f(x) = 2x saa arvon yksi.
   2x = 1, josta x = ½. Tangentti y = x kulkee siis pisteen (½, ½) kautta ja tietenkin myös itse integraalikäyrä kulkee tämän saman pisteen kautta.

   $F(½) = ½ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$ ja kysytty integraalifunktio

   $F(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

   On olemassa toinenkin ratkaisukeino. Käyrällä ja tangentilla on yksi yhteinen piste (tosin tangentti saattaa joskus leikata käyrää jossain muussa pisteessä). Ratkaistaan siis käyrän ja tangentin muodostama yhtälöpari. Koska kyseessä on suoran ja paraabelin yhteiset pisteet, näitä voi teoriassa olla kaksi, yksi taikka ei yhtään. Tangenttitapaus on näistä se, jolla on vain yksi ratkaisu. Siis yhtälöparilla $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 + C \end{cases}$, joka sijoituskeinoa käyttäen sievenee yhdeksi yhtälöksi $x = x^2 + C$ eli $x^2 - x + C = 0$ tulee olla täsmälleen yksi ratkaisu. Toisen asteen yhtälölle käy näin, kun sen diskriminantti on nolla.
   $D = 1^2 – 4·1·C = 0$ eli 4C = 1, josta C = ¼.

3. a) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

b) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C, \ x \neq 0$

c) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{½} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C, \ x \geq 0$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-½} dx = \frac{x^{½}}{½} + C = 2\sqrt{x} + C, x > 0$

4. $\int (4x^3 + 3x^2 + 8x + a) dx = x^4 + x^3 + 4x^2 + ax + C$.

5. $\int (2x+3)^2 dx = \int (4x^2 + 12x + 9) dx = \frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x + C$.

6. f: f(x) = cos x – 2 sin x + 3 $e^x = \sin x + 2\cos x + 3e^x + C$. Se integraalifunktio, joka kulkee origon kautta, toteuttaa ehdon F(0) = 0.
$\sin 0 + 2\cos 0 + 3e^0 + C = 0 \Leftrightarrow 0 + 2 + 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -5.$

Vastaus: $F(x) = \sin x + 2\cos x + 3e^x - 5.$

7. Paraabelin $y = x^2 + 4x + 5$ huipun x-koordinaatti on derivaatan 2x + 4 nollakohta eli x = – 2. Y-koordinaatti on $y = (-2)^2 + 4(-2) + 5 = 1$.
Integraalifunktio kulkee siten pisteen (– 2, 1) kautta.

$\int (4x^3 - 9x^2 + 3x) dx = x^4 - 3x^3 + \frac{3x^2}{2} + C.$ Ehto F(– 2) = 1 antaa yhtälön

$(-2)^4 - 3(-2)^3 + \frac{3(-2)^2}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = -45$.

Vastaus: $F(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{3x^2}{2} - 45$

8. a) $\int (2x - 4t) dx = x^2 - 4tx + C$

b) $\int (2x - 4t) dt = 2tx - 2t^2 + C$

c) $\int (2x - 4t) dz = (2x - 4t)z + C$

9. $|x| = \begin{cases} x, \text{ kun } x \geq 0 \\ -x, \text{ kun } x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \int (2x)dx = x^2 + C, \text{ kun } x \geq 0 \\ \int 0dx = C_1, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$

Funktion F(x) pitää olla jatkuva, mitä se kahtena paloittain määriteltynä polynomifunktiona onkin kaikkialla muualla paitsi mahdollisesti origossa. Tämä piste on tutkittava erikseen jatkuvuuden määritelmän mukaan.

$$\lim_{x \to 0_+} F(x) = \lim_{x \to 0_+} x^2 + C = C = F(0)$$
$$\lim_{x \to 0_-} F(x) = \lim_{x \to 0_+} C_1 = C_1$$

Jatkuvuus toteutuu, kun funktion F toispuoleiset raja-arvot yhtyvät toisiinsa ja lisäksi funktion F arvoon origossa. Tämä johtaa yhtälöön $C_1 = C$.

$F(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$

Vastaus: Se integraalifunktio, jolle F(1) = 3, on $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ kun } x \geq 0 \\ 2, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$

Yleisesti $F(x) = \begin{cases} x^2 + C, \text{ kun } x \geq 0 \\ C, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$

10. $\int x\sqrt{1-x^2}dx = \int x(1-x^2)^{½}dx = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{½}dx =$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} + C.$$

Integraalifunktion määrittelyjoukko rajautuu siten, ettei negatiivisella luvulla ole neliöjuurta. Johtaa siis epäyhtälöön $1 - x^2 \geq 0.$ Toisen asteen epäyhtälöä ratkaistaessa AINA ratkaistava ensin vastaava yhtälö.

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$ Epäyhtälön vasemman puolen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa positiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

Tässä kai on nyt hiukan kyseenalaista, onko F derivoituva pisteissä x = ± 1. Erotusosamäärällä ei ole vasemmanpuoleista raja-arvoa pisteessä x = -1 eikä oikeanpuoleista raja-arvoa pisteessä x = 1. Jos molemmanpuoleiset raja-arvot vaaditaan, niin $F(x) = = -\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} + C, -1 < x < 1.$

11. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -2x\left(1-x^2\right)^{-½} dx = -(1-x^2)^{½} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$

12. Itseisarvoja ei tarvita, koska $3 + 2e^x > 3$, eikä ole siten koskaan negatiivinen.

13. a) $\int (x^2 - 4x)^2 dx = \int (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16x^3}{3} + C$.

b) $\int (2x-4)(x^2-4x)^2 dx = \frac{(x^2-4x)^3}{3} + C$

c) $\int (x^2-4x)^2 dt = t(x^2-4x)^2 + C$

14. $\int (1-x)\sqrt[3]{x}\,dx = \int (\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x}) dx = \int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}) dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C =$

$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{5}\right) + C.$

15. a) $\int (\sin x \cos x) dx = ½\int (2\sin x \cos x) dx = ½\int (\sin 2x) dx = \frac{-\cos 2x}{4} + C.$

b) $\int (\tan^2 x + 2) dx = \int (1 + \tan^2 x + 1) dx = \tan x + x + C$

16. $F(x) = \begin{cases} \int x^2 dx, \text{ kun } x < 1 \\ \int x\,dx, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + C, \text{ kun } x < 1 \\ \frac{x^2}{2} + C_1, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$

$F(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{2^2}{2} + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 1.$ Siten asia etenee

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+C,\ \text{kun } x<1\\[2ex] \dfrac{x^2+2}{2},\ \text{kun } x\ge 1\end{cases}.$$

Nyt on mitä ilmeisintä, että $\lim\limits_{x\to 1_+} F(x)=\dfrac{3}{2}=F(1).$ Pannaan funktion F vasemman-puoleiseksi raja-arvoksi myös 1½.

$$\lim_{x\to 1_-} F(x)=\lim_{x\to 1_-}\frac{1^3}{3}+C=\frac{1}{3}+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=\frac{7}{6}.$$

Vastaus: $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{7}{6}=\dfrac{2x^3+7}{6},\ \text{kun } x<1\\[2ex] \dfrac{x^2+2}{2},\ \text{kun } x\ge 1\end{cases}$

17. $\int(3e^{2x}-e^{-x})dx=\dfrac{3}{2}e^{2x}+e^{-x}+C$

18. $\int(\sin 2x-2\cos\dfrac{x}{2})dx=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-4\sin\dfrac{x}{2}+C$

Seuraavissa tarvittava osittaisintegroinnin laskukaava:

$\int f'g\,dx=fg-\int fg'dx$

19. Integraalissa $\int x\sin x\,dx$ valitaan $\begin{matrix}f'=\sin x & g=x\\ f=-\cos x & g'=1\end{matrix}$ ja sijoitus antaa

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int -\cos x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$$

20. Integraalissa $\int x^2\sin x\,dx$ valitaan $\begin{matrix}f'=\sin x & g=x^2\\ f=-\cos x & g'=2x\end{matrix}$ ja sijoitetaan:

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x-\int 2x(-\cos x)dx=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$$

Sovellettava osittaisintegrointia uudelleen: valitaan $\begin{matrix} f' = \cos x & g = 2x \\ f = \sin x & g' = 2 \end{matrix}$:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

21. Integraalissa $\int x \ln x dx$ valitaan $\begin{matrix} f' = x & g = \ln x \\ f = \dfrac{x^2}{2} & g' = \dfrac{1}{x} \end{matrix}$ ja sijoitetaan

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

22. Paremmin saattaa mennä lähtemällä kaksinkertaisen kosinin laskukaavasta.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Täten $\int \sin^2 x dx = \int \dfrac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2} dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

23. Integraalissa $\int \dfrac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$ valitaan $\begin{matrix} f' = e^{-x} & g = x \\ f = -e^{-x} & g' = 1 \end{matrix}$ ja sijoitus

antaa $\int \dfrac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx =$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

24. Väitetään siis, että $\int f g'' dx = f g' - f' g + \int f'' g dx$.

Derivoidaan aluksi funktio fg':

$D(fg') = fg'' + f'g' \Leftrightarrow fg'' = D(fg') - f'g'$ ja integroidaan puolittain:

$\int fg'' dx = fg' - \int f'g' dx$, missä oikeanpuoleiseen lausekkeeseen sovelletaan osittaisintegrointia:

$\int uv' = uv - \int u'v$ ja valitaan: $\begin{matrix} u = f' & v' = g' \\ u' = f'' & v = g \end{matrix}$

$\int fg'' dx = fg' - \int f'g' dx = fg' - gf' + \int gf'' dx$, josta termejä vaihtelemalla saadaan väite.

25. Integraalissa $\int e^x \cos x\, dx$ valitaan aluksi $\begin{matrix} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{matrix}$ soveltaen nyt kaavaa $\int uv' = uv - \int u'v$:

$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x$. Uudelleen: $\begin{matrix} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{matrix}$:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \Leftrightarrow$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + 2C \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

26. Kun integroitava funktio jaetaan jakokulmassa, saadaan:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 5x + 9 \\ \hline x - 1 & 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \\ & \underline{2x^3 - 2x^2} \\ & \quad 5x^2 + 4x \\ & \quad \underline{5x^2 - 5x} \\ & \qquad 9x + 5 \\ & \qquad \underline{9x - 9} \\ & \qquad\quad 14 \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x - 1} dx = \int (2x^2 + 5x + 9 - \frac{14}{x-1}) dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 9x - 14\ln|x - 1| + C,\ x \neq 1$$

27. Määritä $\int \frac{x-1}{x+1} dx = \int \frac{x+1-2}{x+1} dx = \int (1 - \frac{2}{x+1}) dx = x - 2\ln|x+1| + C$. $x \neq -1$.

28. $$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A - 2B}{x^2 - 4} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 4A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \text{ ja edelleen } \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{3x^2-12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx = \frac{1}{12}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C =$$
$$= \frac{1}{12}\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C,\ x \neq \pm 2$$

29. $$\frac{6x}{x^2-9} = \frac{6A}{x-3} + \frac{6}{x+3} = \frac{6(Ax+A+Bx-B)}{(x-1)(x+1)} = \frac{6(A+B)x+6(A-B)}{x^2-1}$$

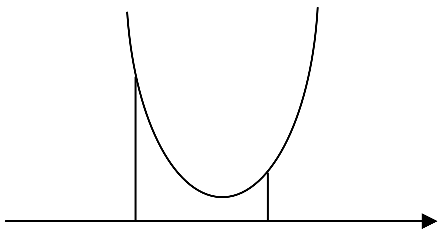
$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{2} \text{ ja edelleen } A=\frac{1}{2}=B$$

$$\int \frac{6x}{x^2-3}dx = 6\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}\right)dx = 3(\ln|x-3| + \ln|x+3|) + C = 3\ln\left|x^2-9\right| + C$$

Tässä $x \neq \pm 3$. Huomasitko, että tämän olisi voinut integroida nojautuen yhdistetyn funktion derivaattaan.

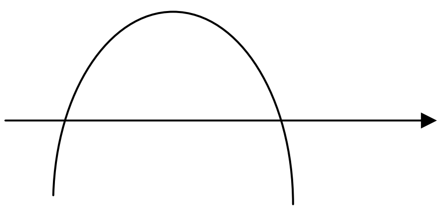
30. Paraabeli $y = x^2 + 2x + 2$ kulkee kokonaisuudessaan x-akselin yläpuolella, sillä $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$ aina. Siten kysytyn alueen pinta-ala on

$$A = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 2)dx = \Big/_{-2}^{1} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right) = \frac{1^3}{3} + 1^2 + 2\cdot 1 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 2(-2)\right) =$$
$$= \frac{1}{3} + 3 - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 4\right) = \frac{1}{3} + 3 + \frac{8}{3} = 6$$



Pinta-ala on 6 pinnan yksikköä.

31. Paraabeli $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ aukeaa alaspäin ja rajoittaa x-akselin kanssa suljetun tasoalueen. Tarvitaan paraabelin ja x-akselin keikkauspisteen koordinaatit.



$$2 - \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$A=\int_{-2}^{2}(2-\frac{x^2}{2})dx=\underset{-2}{\overset{2}{/}}(2x-\frac{x^3}{6})=2\cdot 2-\frac{2^3}{6}-(2(-2)-\frac{(-2)^3}{6})=4-\frac{8}{6}+4-\frac{8}{3}=$$

$$=8-\frac{16}{6}=8-\frac{8}{3}=\frac{24-8}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$$

Ala on $\frac{16}{3}$ pinnan yksikköä.

32. Funktion y = sin x kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella mm. välillä $[0,\pi]$. Tällöin kyseisen silmukan muotoisen alueen ala on

$$A=\int_0^{\pi}\sin x dx=\underset{0}{\overset{\pi}{/}}-\cos x=1+1=2.$$

Ala on 2 pinnan yksikköä.

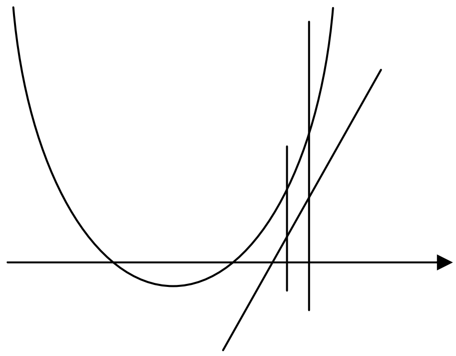
33. Välillä $0 \le x \le 2$ on aina $x^3 \ge 0$ ja $A=\int_0^2 x^3 dx=\underset{0}{\overset{2}{/}}\frac{x^4}{4}=\frac{16}{4}-0=4.$

34. Yhteisten pisteiden laskemiseksi yritetään ratkaista käyrien muodostama yhtälöpari:

$\begin{cases} y=2x^2+x \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2+x=2x-1 \Leftrightarrow 2x^2-x+1=0$. Viimeksi saadun yhtälön diskriminantti

$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$

Suora ja paraabeli eivät siis leikkaa toisiaan. Tällöin ylöspäin aukeava paraabeli kulkee kokonaisuudessaan suoran yläpuolella ja käyrien keskinäinen sijainti on oheisen kuvan mukainen



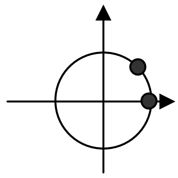
$$A=\int_1^2(2x^2+x)dx-\int_1^2(2x-1)dx=$$

$$=\underset{1}{\overset{2}{/}}(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2})-\underset{1}{\overset{2}{/}}(x^2-x)=$$

$$=(\frac{2\cdot 2^3}{3}+\frac{2^2}{2})-(\frac{2\cdot 1^3}{3}+\frac{1^2}{2})-\left[2^2-2-(1^2-1)\right]=$$

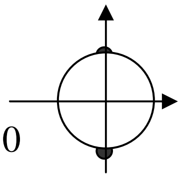
$$=\frac{16}{3}+2-(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})-[4-2-1+1]=\frac{14}{3}-\frac{1}{2}+2-2=\frac{28}{6}-\frac{3}{6}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}.$$

35. a) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \Big/_1^4 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$



b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \Big/_1^4 2\sqrt{x} = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2$

c) $\int_3^6 \frac{dx}{x} = \Big/_3^6 \ln x = \ln 6 - \ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \ln 2$



d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(½x)dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} -2\cos\frac{x}{2} = -2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2})) = -2(0-0) = 0$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos}dx = \Big/_0^{\frac{\pi}{4}} -\ln|\cos x| = -\ln\cos\frac{\pi}{4} - (-\ln\cos 0) =$

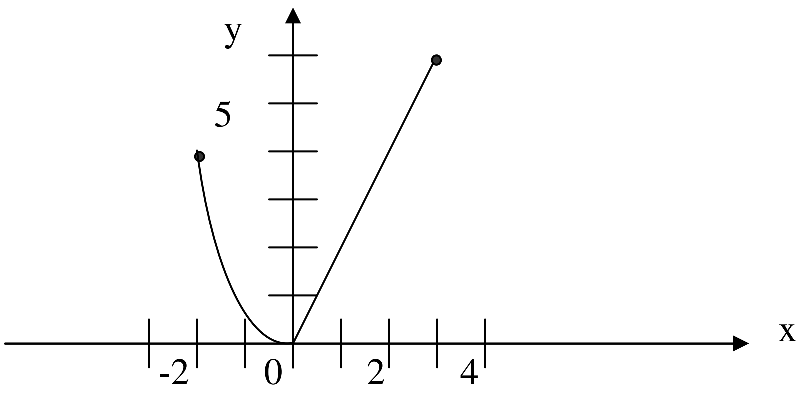
$= -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = -(\ln 1 - \ln\sqrt{2}) + 0 = 0 + \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$

36. $\int_a^b x^2 dx = \Big/_a^b \frac{x^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3} = \zeta^2(b-a) \Leftrightarrow \zeta = \pm\sqrt{\frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 + ba + a^2}{3}}$,

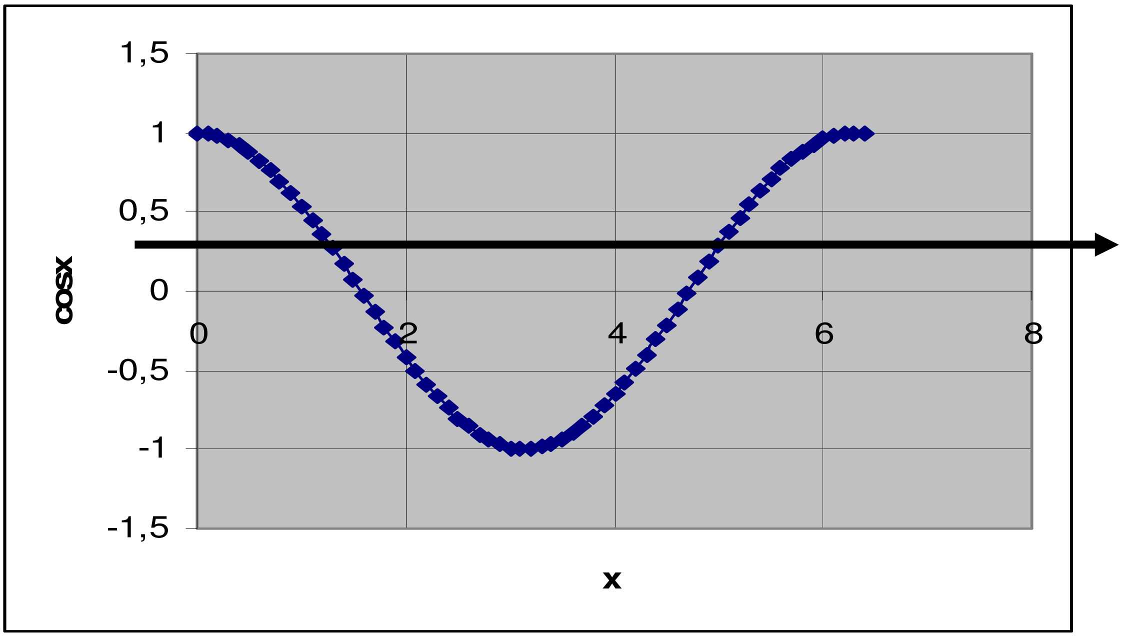
Joista vain positiivi kelpaa. ässä tapauksessa taitaa määrätyn integraalin väliarvolauseessa oleva luku ξ olla integroimisvälin keskipiste.

37. On annettu funktio f: $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } -2 \le x < 0 \\ 2x, \text{ kun } 0 \le x \le 3 \end{cases}$. Tällöin on

$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0} x^2 dx + \int_0^3 2x\,dx = \Big/_{-2}^{0} \frac{x^3}{3} + \Big/_0^3 x^2 = 0 - \frac{(-2)^3}{3} + 3\cdot 3 - 0 = \frac{8}{3} + 9 = \frac{35}{3}$



38.



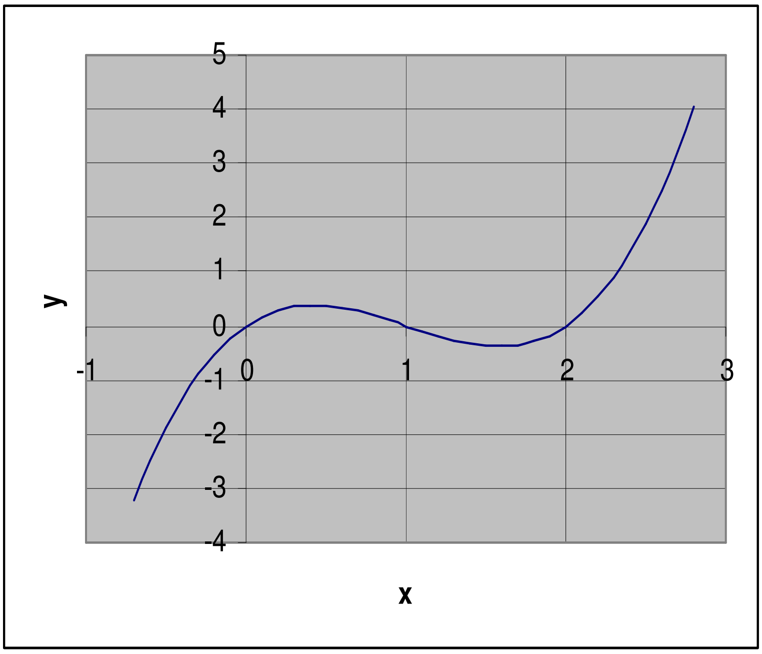
$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx=\Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x-\Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x+\Big/_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin x=$$

$$=1-0-(-1-1)+0-(-1)=4$$

39. Kysytään epäyhtälöä käyttäen, milloin kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella:
$x^3-3x^2+2x\geq 0$. Ratkaistaan vastaava yhtälö $x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x^2-3x+2)=0\Leftrightarrow x=0$ tai $x=1$ tai $x=2$. Tällöin epäyhtälö vasen puoli tekijöihin jaettuna $x(x-1)(x-2)\geq 0$. Laaditaan tekijäin merkkikaavio

		0	1	2
x	−	+	+	+
x − 1	−	−	+	+
x − 2	−	−	−	+
vasen puoli	−	+	−	+

Merkkikaavion nojalla funktion kuvaaja on pääpiirtein piirrettävissä, ainakin sen sijaintiin x-akseliin nähden:



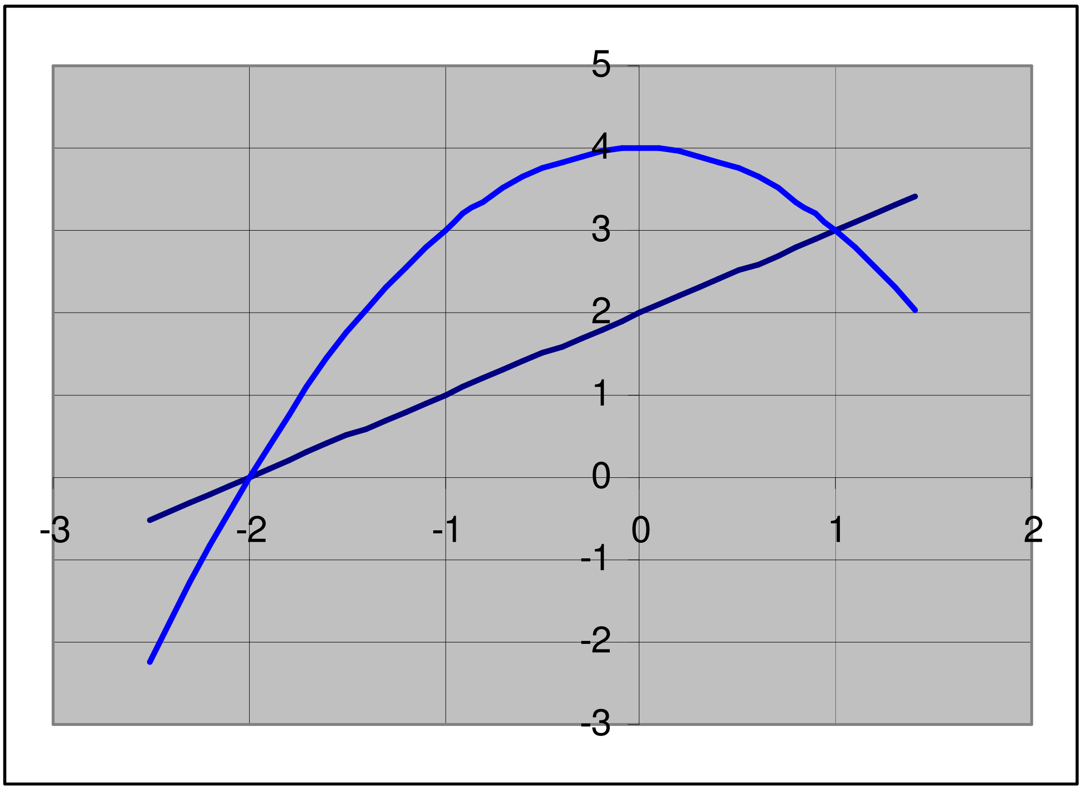
$$A=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx-\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx=$$

$$=\Big/_0^1 \frac{x^4}{4}-x^3+x^2-\Big/_1^2 \frac{x^4}{4}-x^3+x^2=$$

$$=\frac{1}{4}-1+1-0-\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2-\frac{1}{4}-1+1\right]=\frac{1}{4}-\left[4-8+4-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}$$

40. Rajakäyrien leikkauspisteet yhtälöparista:

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x+2=4-x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ taikka } x=1$$

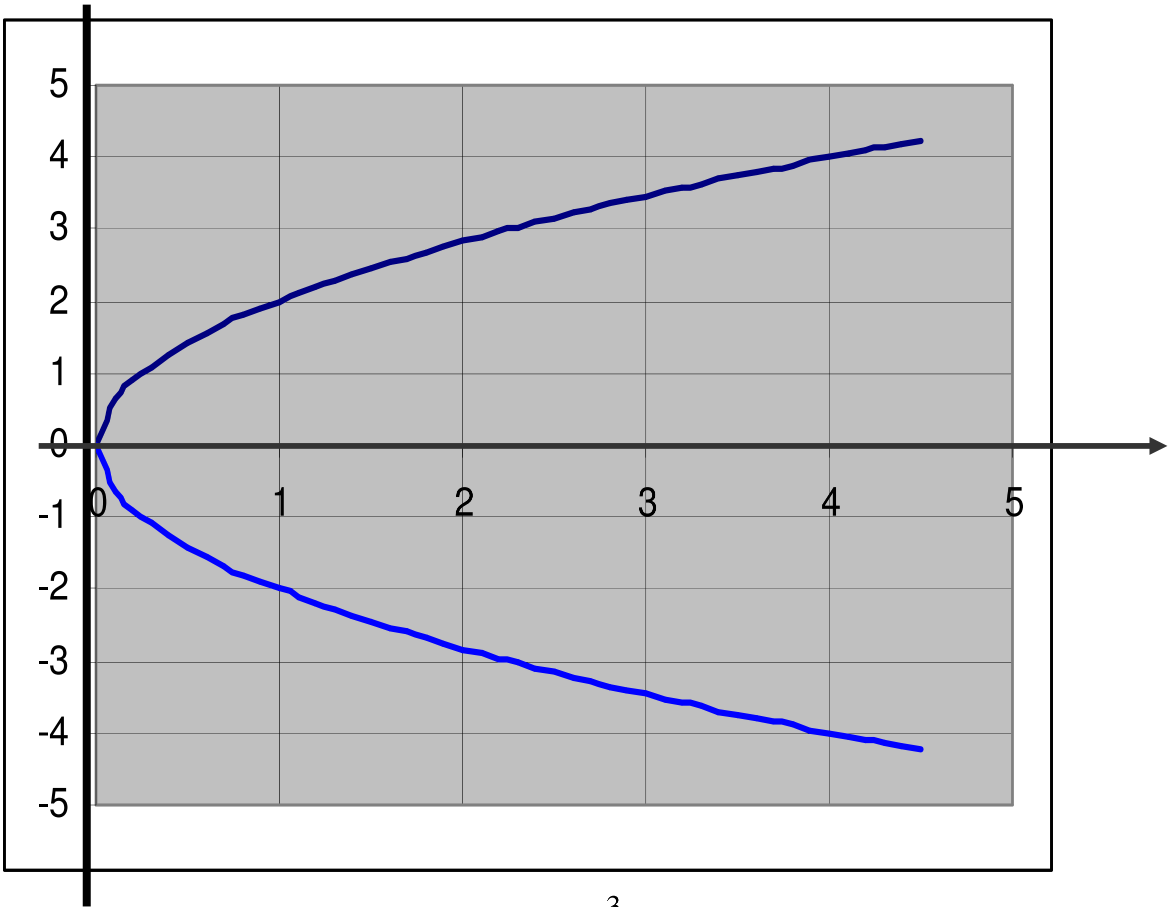


Leikkauspisteiden välisellä osuudella on alaspäin aukeava paraabeli aina suoran yläpuolella.

$$A = \int_{-2}^{1} \left[4 - x^2 - x - 2\right] dx = \int_{-2}^{1} \left[2 - x - x^2\right] dx = \Big/_{-2}^{1} (2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}) =$$

$$= (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 4\frac{1}{2}.$$

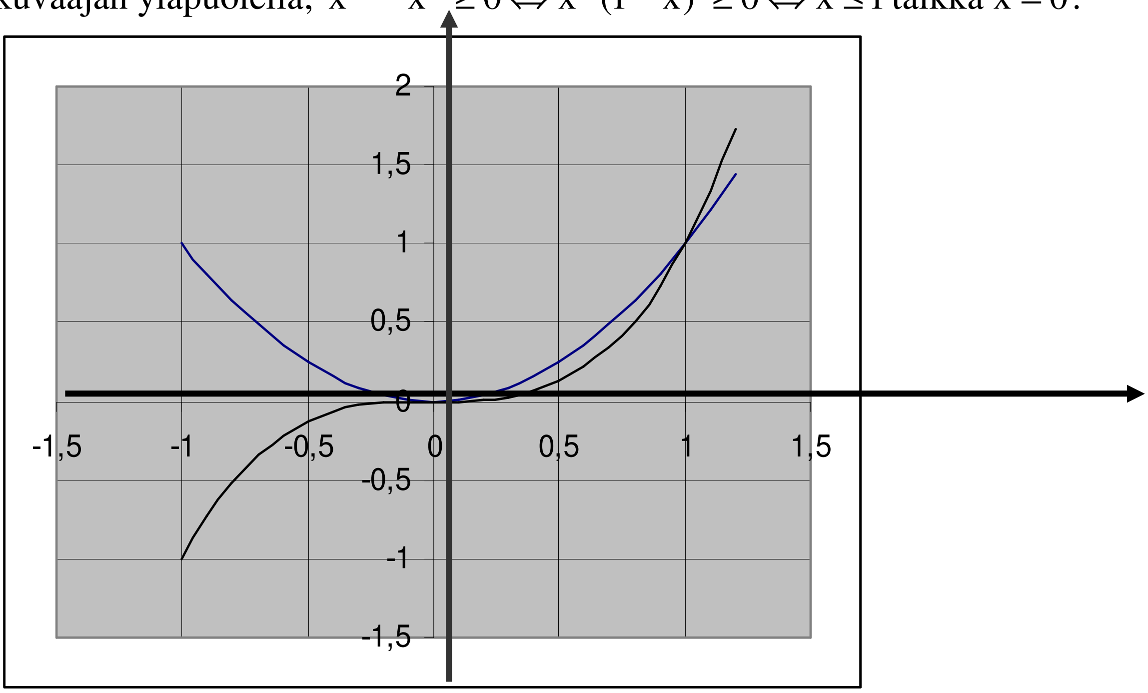
41. Kun piirretään paraabeli $4x = y^2$, huomataan sen avautuvan oikealle. Jos integroidaan pitkin x-akselia (onko muitakin mahdollisuuksia), yläkäyränä on $y = 2\sqrt{x}$ ja alakäyränä $y = -2\sqrt{x}$.



$$A = \int_0^4 (2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})dx = \int_0^4 4\sqrt{x}dx = \Big/_0^4 \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{64}{3}$$

Sujuisiko integrointi pitkin y-akselia???

42. Kysytään vaikkapa niin, että milloin $y = x^2$ kulkee funktion $y = x^3$ kuvaajan yläpuolella; $x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ taikka $x = 0$.



$$A=\int_0^1\left[x^2-x^3\right]dx=\Big/_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

43. Suora y = x – 2 jakaa käyrän y = (x – 2)(6 – x) ja x-akselin välisen alueen kahteen osaan. Paraabelin ja suoran leikkauspisteet:

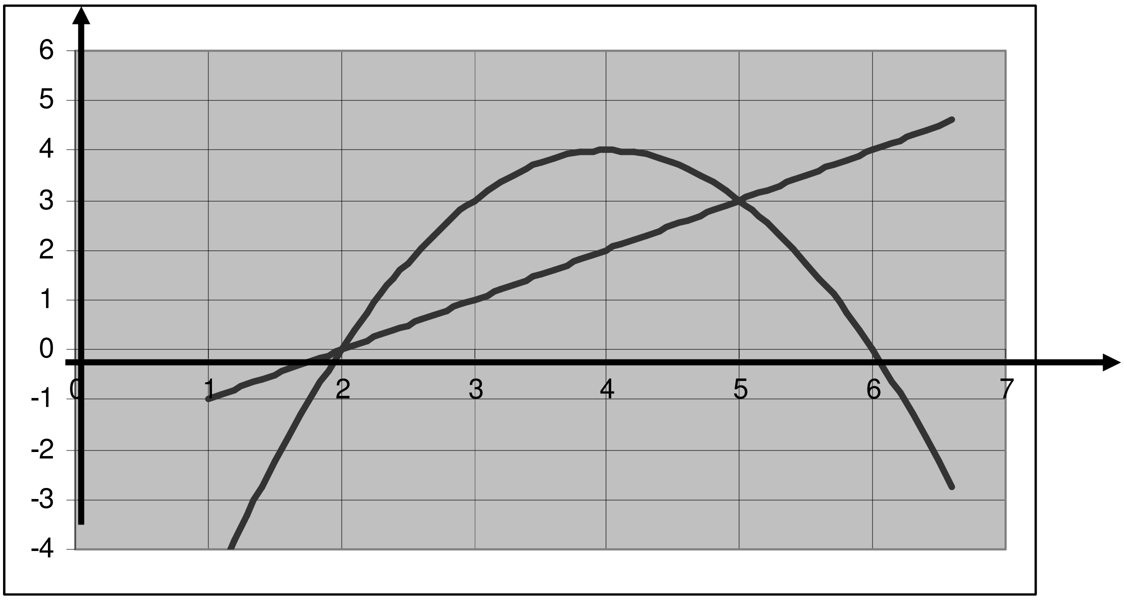
$$\begin{cases} y=x-2 \\ y=(x-2)(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow (x-2)(6-x)=x-2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(6-x)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left[6-x-1\right]=0 \Leftrightarrow (x-2)(5-x)=0 \Leftrightarrow x=2\ tai\ x=5$$

Paraabelin ja x-akselin välinen alue:

$$A=\Big/_2^6(x-2)(6-x)=\int_2^6(8x-12-x^2)dx=\Big/_2^6\left(4x^2-12x-\frac{x^3}{3}\right)=\frac{32}{3}$$



Paraabelin ja suoran välinen alue:

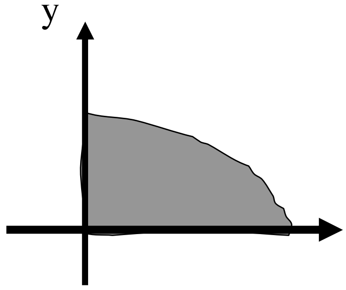
$$A=\int_2^5(8x-12-x^2+2)dx=\int_2^5(7x-10-x^2)dx=\Big/_2^5\left(\frac{7x^2}{2}-10x-\frac{x^3}{3}\right)=4\frac{1}{2}$$

Tällöin suoran, paraabelin osasen (välillä 5…6) sekä x-akselin väliin jäävän alueen ala on $\frac{32}{3}-4\frac{1}{2}=\frac{37}{6}$, jos on oikein laskettu muutoin. Jälkimmäinen on osasista suurempi. Kysytty suhde $4\frac{1}{2}:\frac{37}{6}=\frac{9}{2}:\frac{37}{6}=\frac{9\cdot 6}{2\cdot 37}=\frac{27}{37}$.

44. Positiivisten koordinaattiakseleiden ja käyrän $y=\sqrt{4-x}$ rajoittama pinta on kuvattu ohessa. Integraali alkaa siis origosta ja päättyy arvoon x = 4.

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{4-x})^2dx=\pi\int_0^4(4-x)dx=\pi\Big/_0^4(4x-\frac{x^2}{2})=8\pi$$

$y=\sqrt{4-x}$



45. Kun pyörähdetään y-akselin ympäri, niin pyörähdyskappaleen pohja on xy-tasolla ja sen korkein kohta on pisteessä (0,2). Integroimismuuttuja juoksee siten y-akselia pitkin välin 0…2, ja pyörähdyssäteenä kullakin y:n arvolla on rajakäyrän x-koordinaatti, joka ilmeisesti pitää käyrän yhtälöstä ratkaista.

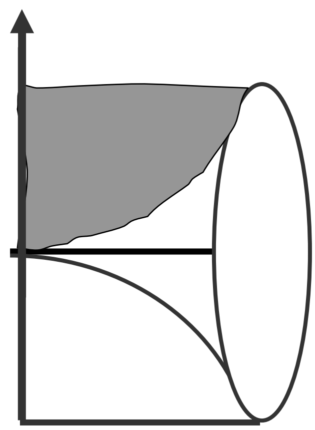
$y=\sqrt{4-x}\Rightarrow y^2=4-x\Leftrightarrow x=4-y^2$ ja kysytty tilavuus

$$V=\pi\int_0^2(4-y^2)^2dy=\pi\int_0^2(16-8y^2+y^4)dy=\pi\Big/_0^2(16y-\frac{8yx^3}{3}+\frac{y^5}{5})=$$

$$=\pi(16\cdot 2-\frac{8\cdot 2^3}{3}+\frac{2^5}{5}-0)=\pi(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5})=\frac{256\pi}{15}\approx 54$$

Vastaus: Tilavuus on $\frac{256\pi}{15}$ eli noin 54 tilavuuden yksikköä.

46. Kun paraabelin $y=\frac{x^2}{4}$, y-akselin ja suoran y = 4 rajoittama pinta pyörähtää x-akselin ympäri, tilanne on lähtökohdiltaan viereisen kuvan mukainen. On kuin ympyrälieriöön olisi koverrettu torven muotoinen onkalo. Tässä on analoginen tilanne pinta-alojen määrityksen puolelle tapaukseen, jossa on määritettävä kahden viivan väliin jäävän alueen ala. Tässä on kyseessä kahden viivan väliin jäävän alueen pyörähtämisestä. Syntyvä kappale on enemmän tai vähemmän ontto. Laskemisen idea on se, että vähennetään ulkokappaleen tilavuudesta sisäkappaleen tilavuus Ulkolieriön säde on 4 ja integrointi käy yli välin 0… 4. Paraabeli taitaa leikata suoran y = 4 pisteessä (4, 4).



$$V=\pi\int_0^4(4^2-(\frac{x^2}{4})^2dx=\pi\int_0^4(16-\frac{x^4}{16})dy=\pi\Big/_0^4(16x-\frac{x^5}{80})=$$

$$=\pi(16\cdot 4-\frac{1024}{80})=\frac{256\pi}{5}\approx 160$$

Vastaus: $\frac{256\pi}{5}$ eli noin 160 tilavuuden yksikköä.

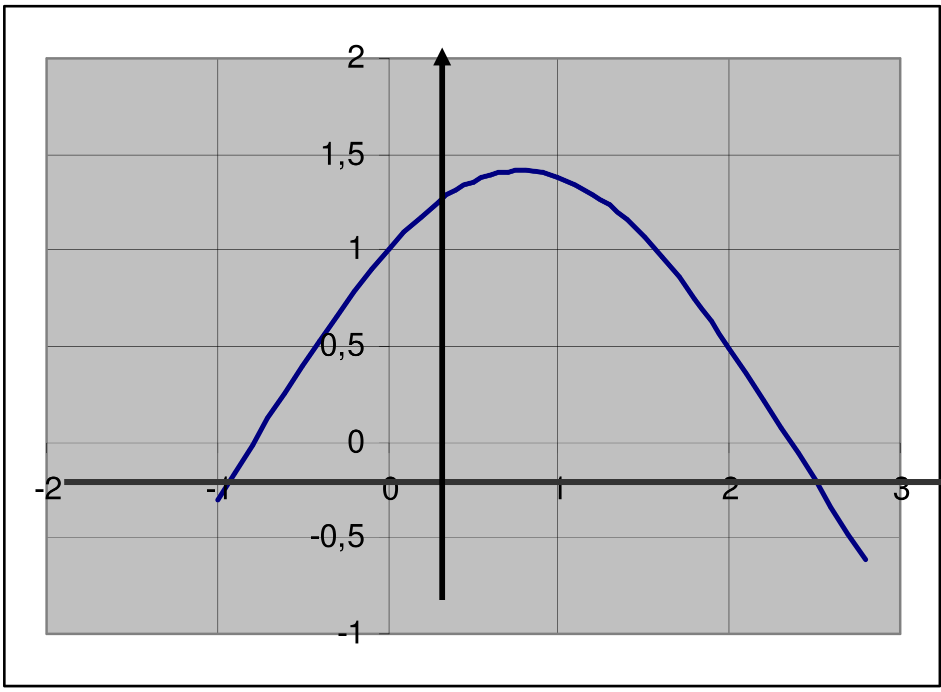
47. Kun funktion y = sin x + cos x kuvaajan välillä $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri, niin tässä ja monissa muissakin pyörähdyksissä laskut ovat siitä mukavia, että kun puörähdyssäde korotetaan neliöön, niin ei tarvitse tietää käyrän sijainnista x-akseliin nähden mitään. Säteen neliö joka tapauksessa on aina ei-negatiivista. Pyörähtävän käyrän voi silti piirtää.

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx)=$$

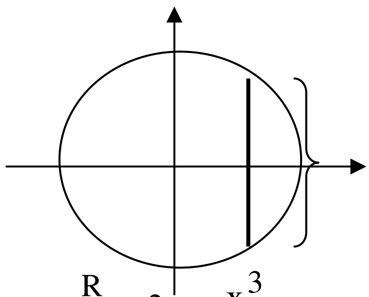
$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+2\sin x\cos x)dx)=\pi\Big/_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(x+\sin^2 x)=$$

$$=\pi\left[\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})+\sin^2(\frac{3\pi}{4})-\sin^2(-\frac{\pi}{4})\right]=\pi\left[\pi+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2-(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2\right]=$$

$$=\pi\left[\pi+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=\pi^2$$



48. Kappaleen pohja on ympyrä $x^2 + y^2 = R^2$. Jos integroidaan pitkin x-akselia, niin kullakin x:n arvolla kolmion sivun pituus on 2y ja kun tasasivuisen (sivu s) kolmion pinta-ala on $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$, niin



$$V = \int_{-R}^{R} (2\sqrt{R^2 - x^2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} dx = \sqrt{3} \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = 2\sqrt{3} \,/_{0}^{R} (R^2 x - \frac{x^3}{3})$$
$$= \frac{4R^3\sqrt{3}}{3}$$

49. Jos funktion $f(x) = \int_a^x xt^2 dt$ derivointi suoraan on hankalaa, niin voit ensin integroida normaalin sijoitusmenettelyn kautta. Integroinnin kannaltahan x on vakiotavaraa. Jos derivoidaan suoraan. niin nojataan tulokseen

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow$$

$I'(x) = f(x)$. Integroinnin kannalta x on edelleen vakiokamaa, muuttuja t vain juoksee välin a … x:

$$f(x) = \int_a^x xt^2 dt = x \cdot \int_a^x t^2 dt = \Rightarrow$$

$$f'(x) = 1 \cdot \int_a^x t^2 dt + x \cdot x^2 = \Big/_a^x \frac{t^3}{3} + x^3 = \frac{4x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$f''(x) = 4x^2$$

50. a) Kun tiedetään, että $v(t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t$, niin on suoritettava aivan normaali ääriarvoselvitys välillä [0,18s]. Funktio v on polynomifunktiona jatkuva ko. suljetulla välillä ja derivoituva vastaavalla avoimella välillä.

Derivaatta $v'(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t - 2 \cdot \frac{m}{s^2} = 0 \Leftrightarrow t = 6s$

$$\begin{cases} v(0) = 0\,\frac{m}{s}, \text{kappale paikoillaan} \\ v(6s) = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot (6s)^2 - 2\frac{m}{s^2} \cdot 6s = -6\,\frac{m}{s}, \text{ peruuttaa} \\ v(18s) = 18\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

b) Koska vauhti on paikkakoordinaatin derivaatta ja kun vauhti tiedetään ajan funktiona, niin paikka saadaan integroimalla ajan suhteen:

$$v(t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{18} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t^3 - \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + C$$

Alkuehto x(0) = 8 m kiinnittää integroimisvakion. Saadaan suoraan, jotta C = 8 m ja siten

$$x(t) = \frac{1}{18} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t^3 - \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 8m.$$

Erikoisesti x(18s) = $\frac{1}{18} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot (18s)^3 - \frac{m}{s^2} \cdot (18s)^2 + 8m = 8m.$

Paikkakoordinaatti ei muutu, vaikka kpl liikkui. !!

c) Kiihtyvyys on vauhdin derivaatta ja paikkakoordinaatin toinen derivaatta joten

$$v'(t) = a(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t - 2 \cdot \frac{m}{s^2}.$$

Liike ei ole siis tasaisesti kiihtyvää, koska kiihtyvyys ei ole vakio. Kiihtyvyyden kuvaaja on periaatteessa suora a = t/3 – 2 , eli alkaa pisteestä (0, – 2) ja päättyy pisteeseen (18, 4) koordinaatistossa, jossa vaaka-akselina on aika ja pystyakselilla vauhti.

51. $W = \int_0^4 6\sqrt{s}\,ds = \Big/_0^4\, 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot s^{1.5} = 4(4^{\frac{3}{2}} - 0) = 32$, työn suuruus siis 32 J.

52. Käyrän $y = \frac{1}{x}$, suorien x = 1, x = k (k > 0) rajoittama pinta pyörähtää x-akselin ympäri. Jos aluksi oletetaan, että k > 1, niin

$$V = \pi\int_1^k (\frac{1}{x})^2 dx = \pi\int_1^k \frac{dx}{x^2} = \pi \Big/_1^k - \frac{1}{x} = \pi(1 - \frac{1}{k}) \to \pi, \text{ kun } k \to \infty.$$

Jos lopuksi oletetaan, että 0<k< 1, niin

$$V = \pi\int_k^1 (\frac{1}{x})^2 dx = \pi\int_k^1 \frac{dx}{x^2} = \pi \Big/_k^1 - \frac{1}{x} = \pi(\frac{1}{k} - 1) \to \infty, \text{ kun } k \to 0_+.$$