4. Funktion arvioimisesta eli approksimoimisesta

Vaikka nykyaikaiset laskimet osaavatkin melkein kaiken muun välttämättömän paitsi kahvinkeiton, niin joskus, milloin mistäkin syystä, löytää itsensä tilanteessa, missä tekisi mieli yksinkertaistaa käytettävää funktiota. Silloin ollaan hyvässä seurassa: *Albert Einsteinin* kerrotaan neuvoneen oppilaitaan toteamalla, että ”Yksinkertaistakaa niin paljon kuin mahdollista, mutta ei sen enempää”. Yritetään nyt ottaa tästä vaari.

Lineaarisesta interpoloimisesta

Kuvittele itsesi kuusi metriä korkeaan, puiseen ja melko hataraan, neliöpohjaiseen laudoista rakennettuun torniin, jonka pohjan mitat ovat 200cm · 200cm. Kahdella vastakkaisella seinällä, muuten keskellä seiniä, mutta metrin korkeudella maasta on lämpömittari. Näistä itäinen mittari näyttää lukemaa –6,0 ºC ja läntinen –5,0 ºC. Minkä arvelet olevan lämpötilan mittarien määrittelemän vaakatason keskipisteessä? Heitätkö kolikkoa, että kumman nyt ottaisi? Sanotko, ettet tiedä? Luulen, että sinä ehdotat lämpötilaa –5,5 ºC. Entä sitten pisteessä, joka on 1,4 metriä itäisestä mittarista länteen pitkin tuota samaista tasoa? Jos mittarin lukema laskee asteella kahden metrin matkalla, niin kai se sitten laskee $\frac{1{,}4\,m}{2{,}0\,m}\cdot 1\ ^{o}C$ tuolla 140 sentin matkalla, joten kysytyssä pisteessä lämpötila on –5,3 ºC. Tässä on *lineaarinen interpolointi* koko komeudessaan.

Äskeisessä tilanteessa se tosiseikkaa, että sinun kehosi lämmittää ympäristöään koko ajan, sivuutettiin kaikessa rauhassa. Kuusi metriä korkeassa tornissa (*ZP2*) tämä ei paljon haittaa, jos pysyttelet tornin seinien lähellä.

Otan nyt tavoitteekseni ensin muodollisen tiivistelmän laatimisen tästä. Tiivistelmän intuitiiviseksi perustaksi otan kaksi esimerkkiä.

Esimerkki 33

Palaan nyt äskeiseen kuusimetristä tornia koskevaan tilanteeseen. Ratkaisen saman ongelman uudestaan, nyt vähän muodollisemmin. Määritellään koordinaatisto siten, että x – akseli kulkee lämpömittarien kautta ja että $x = 0$ läntisen mittarin kohdalla ja $x = 2$ itäisen mittarin kohdalla. Lämpötilalle varaan y – akselin, joka olkoon pystyssä. Tällöin $y = –5$, kun $x = 0$ ja $y = –6$, kun $x =$ 2. Nämä pisteet yhdistävän suoran yhtälö on siis

$$y+6=\frac{-6+5}{2-0}\cdot(x-2) \quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{1}{2}\cdot x-5 \quad .$$

Täten sain lämpötilan *x:n* funktiona $f(x)=-\frac{1}{2}x-5$, kun <u>oletin</u>, että lämpötilaa voidaan kuvata tällaisella yksinkertaisella suoralla. Tarkasteltavalla välillä tämä on tarkin saatavilla oleva menetelmä, jos lämpömittareita ei siirretä. Kun sijoitetaan x = 2,0 – 1,4, niin saadaan tuo sama, jo kerran laskettu arvo –5,3 astetta.

Huomaa! Esimerkin 33 tarkoittaman tilanteen perusteella on selvää, että etsitty $f(x)$ on voimassa vain noitten neljän seinän sisällä ja sielläkin vain *x:n* arvojen 0 ja 2 välillä.

Esimerkki 34

Oletetaan, että $X \sim N(0;1)$. Mikä on todennäköisyys $P(X \leq 1{,}358)$?

Ratkaisu

Haen taulukkokirjasta arvot

$$P(X \leq 1{,}35)=\Phi(1{,}35)=0{,}9115$$

ja

$$P(X \leq 1{,}36)=\Phi(1{,}36)=0{,}9131 \quad .$$

Normaalijakauman tiheysfunktio ei ole suora millään välillä. Sen approksimoiminen suoran avulla on kuitenkin parempi keino kuin vastauksen arpominen.

Pisteitten (1,35;0,9115) ja (1,36;0,9131) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y-0{,}9115=\frac{0{,}9131-0{,}9115}{1{,}36-1{,}35}\cdot(x-1{,}35) \quad ,$$

joten $P(X \leq 1{,}358)=\Phi(1{,}358)\approx 0{,}9128$. Koneen tiheysfunktion tarkalla kaavalla laskema arvo on 0,912768 ≈ 0,9128. Sain siis interpoloimalla ihan saman. Tällä kertaa *suoran avulla approksimoiminen* eli *lineaarinen interpolointi* oli siis riittävän tarkka menetelmä.

Edellä käyttämäni teoria voidaan tiivistää seuraavalla tavalla. Jos suure y riippuu *x:stä* ja jos *y:n* arvot tiedetään kahdella *x:n* arvolla eli tunnetaan pisteet $(x_1;y_1)$ ja $(x_2;y_2)$, niin *ensimmäisen asteen interpolointipolynomiksi* sanotaan suoraa

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot(x-x_1)}$$

tai yhtä hyvin suoraa

$$\boxed{y-y_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot(x-x_2)}\quad .$$

Huomaa! Erityisen tarkkana on oltava siitä, että ymmärtää, millä välillä mitäkin interpolointisuoraa voi käyttää.

Esimerkki 35

Eräästä *x:stä* riippuvasta suureesta, jonka lukuarvoja merkitään *y:llä*, tunnetaan kolme arvoa. Ne ovat (2,00; –1,00), (7,00;0,00) ja (13,0;1,00). Arvioi *y:n* arvoa *x:n* arvoilla 3 ja 11.

Ratkaisu

Määritetään interpolointisuorien yhtälöt. Ne ovat

$$y-0=\frac{-1-0}{2-7}\cdot(x-7) \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{5}\cdot x-\frac{7}{5} \tag{1}$$

$$y-0=\frac{1-0}{13-7}\cdot(x-7) \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{6}\cdot x-\frac{7}{6} \tag{2}$$

Näistä saadaan: $y(3) \approx -0{,}800$ ja $y(11) \approx 0{,}667$.

Vastaus: Vastaavat *y:n* arviot ovat –0,800 ja 0,667.

Esimerkki 36

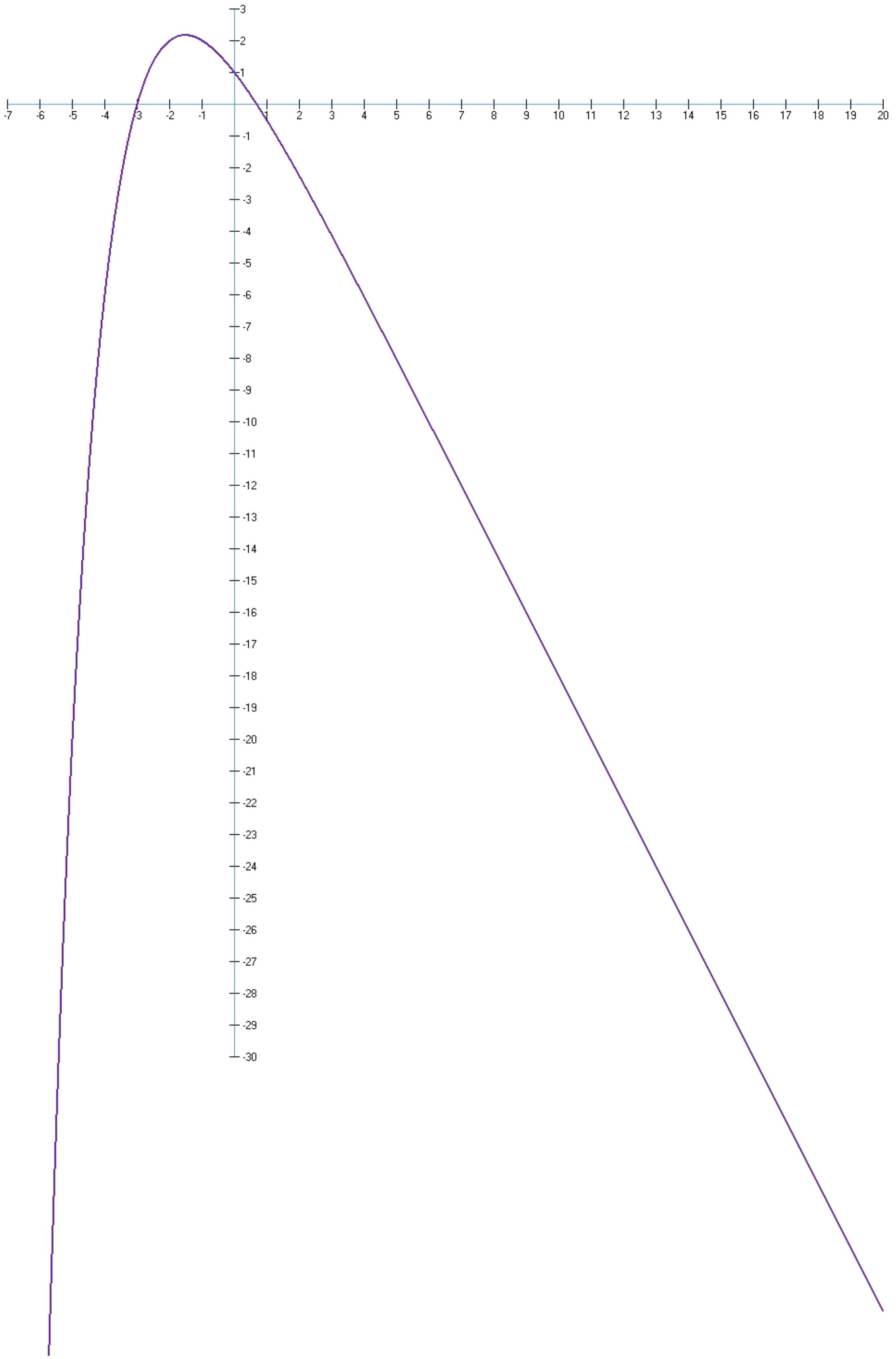
Funktion $f(x)=2-2^{-x}-2x$ yhtälö on aika konstikkaan näköinen. Onneksi sen kuvaaja ei sitten olekaan niin konstikkaan näköinen. Kuva, jonka piirsin tietokoneella on seuraavalla sivulla.

Silmämääräisesti näyttää siltä, että viimeistään niillä *x:n* arvoilla, jotka ovat isompia kuin 3, tätä funktiota voi sangen onnistuneesti arvioida suoran avulla: *x:n* kasvaessa funktion määritelmän yhtälössä termi -2^{-x} kutistuu hyvin nopeasti ja jäljelle jää suora $y = 2 - 2x$. Silmämääräisestikin näkee toki, että välillä [–0,8;3] on viisainta turvautua lyhyisiin väleihin. Tällöin kullekin pienelle välille on laskettava oma suoransa. Näin siis ”mutu – metodilla”. Mutta lasketaanpa.

Laaditaan sen suoran yhtälö, joka kulkee käyrän pisteiden (0;1) ja (30; –50) kautta. Saadaan

$$y+50=\frac{1-(-50)}{0-30}\cdot(x-30) \quad\Leftrightarrow\quad y=1-1{,}7x \quad .$$

Ei siis oikein näytä siltä, mitä juuri äsken arvioin: $y = 2 - 2x$. Lasken taulukkoon muutamia arvoja ja katsotaan sitten. Taulukko on seuraavan sivun kuvan jälkeen.


-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
-16
-17
-18
-19
-20
-21
-22
-23
-24
-25
-26
-27
-28
-29
-30

x	$1-1{,}7\,x$	$2-2^{-x}-2\mathrm{x}$	**Erotus**
40,000	-67,000	-78,000	11,000
30,000	-50,000	-58,000	8,000
0,000	1,000	1,000	0,000
15,000	-24,500	-28,000	3,500
1,000	-0,700	-0,500	-0,200
2,000	-2,400	-2,250	-0,150
3,000	-4,100	-4,125	0,025
4,000	-5,800	-6,027	0,263
5,000	-7,500	-8,031	0,531

Jos aivan pieniä, positiivisia *x:n* arvoja ei lasketa, niin erotuksen itseisarvo ei ole missään vaiheessa kovin pieni. Entä suora $y = 2 - 2x$? Sen avulla päästään sitä parempiin tuloksiin mitä suurempia muuttujan arvoja käytetään. Johtopäätös: ei kelpaa!

Kysymys: Mikä sitten kelpaa?

Vastaus: On tehtävä interpolointisuora kullekin tilanteella erikseen. Isoja vapaan muuttujan välejä ei kannata haikailla. Tällainen monimutkainen funktio on pilkottava pieniin osiin, jos sitä halutaan approksimoida suorien avulla. Kun funktio ei ole sama niin se ei sitten ole sama!

Yksi paljon käytetty, lineaarista interpolointia kehittyneempi menetelmä funktion approksimoimiseksi jossakin pisteessä on funktion <u>tässä pisteessä</u> laskettu *Taylor'in polynomi*. Taylorin polynomit on seuraavan kappaleen aihe.

Esimerkki 37

Mikä on funktion $f(x)=2-2^{-x}-2\mathrm{x}$ ensimmäisen asteen interpolointipolynomi välillä [5;15]? Arvioi virhettä laskimella.

Ratkaisu

Koska $f(5) = -8{,}03125$ ja $f(15) = -28{,}0000$, niin $y+\frac{257}{32}=\frac{-\frac{257}{32}+\frac{917505}{32768}}{5-15}\cdot(x-5)$, josta

$$y=-\frac{654337}{327680}\cdot x+\frac{640005}{327680}\approx -1{,}996878\cdot x+1{,}953140 \quad .$$

Tämä on jo aika lähellä suoraa $y = 2 - 2x$!

Aioin piirtää tähän vielä kuvan näistä funktioista, mutta ne menevät tarkasteluvälillä niin lähelle toisiaan, että kuvasta ei saa selvää. Laskin ilmoittaa suurimmaksi absoluuttiseksi virheeksi noin $1{,}8\cdot 10^{-2}$. Tilanteesta riippuu, onko tämä liikaa vai otetaanko vielä lyhyemmät välit. Oikeastaan tuo [5;15] on aika pitkä väli.

<u>Vastaus</u>: Polynomi on $y=-\frac{654337}{327680}\cdot x+\frac{640005}{327680}$ ja absoluuttinen virhe alle noin $1{,}8\cdot 10^{-2}$.

Taylorin polynomeista

Koska tavallisesti vain funktio $f(x)$ on tarkasti funktio $f(x)$, mikään korvike eli arvio eli approksimaatio ei vastaa totuutta. Esittelen nyt lyhyesti *Taylorin polynomit,* joka on menetelmänä edellä esiteltyjä arvioimistekniikoita kehittyneempi.

Funktion *f* ***n:nnen* asteen asteen Taylorin polynomi kohdassa *x* = *a*** on

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad ,$$

missä $n = 0, 1, 2 \ldots$, merkintä $n!$ tarkoittaa *n*-kertomaa sekä merkintä $f^{(n)}$ funktion *n.* derivaattaa.

Esimerkki 38

Muodosta funktion $f(x)=\sin(x)$ kolmannen asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = \frac{\pi}{2}$.

Ratkaisu

Koska $f(x)=\sin(x)$, niin

$$f(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2})=1$$

$$f'(x)=\cos(x) \quad \text{ja} \quad f'(\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2})=0$$

$$f''(x) = -\sin(x) \quad \text{ja} \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \quad \text{ja} \quad f^{(3)}(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Polynomi on siis

$$\begin{aligned} P_3(x) \quad &= 1 + 0\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{0}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot x + \frac{(8-\pi^2)}{8} \quad . \end{aligned}$$

<u>Vastaus</u>: Kysytty Taylorin polynomi on $P_3(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot x + \frac{(8-\pi^2)}{8}$.

Esimerkki 39

Muodosta funktion $f(x) = e^x \cos(x)$ kolmannen asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu

Vastaavalla tavalla kuin **Esimerkissä 38**:

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x[\cos(x) - \sin(x)] \quad \text{ja} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2\cdot \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) \quad \text{ja} \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -2\cdot \mathrm{e}^x[\cos(x) + \sin(x)] \quad \text{ja} \quad f^{(3)}(0) = -2$$

Polynomiksi saadaan . $P_3(x) = -\frac{1}{3}\cdot x^3 + x + 1$

<u>Vastaus</u>: $P_3(x) = 1 + x - \frac{1}{3}\cdot x^3$.

Esimerkki 40

Muodosta funktion $f(x) = 2 - 2^{-x} - 2\mathrm{x}$ neljännen asteen Taylorin polynomit kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu

Lasketaan tarvittavat derivaatan ja funktion arvot:

$$f(0)=1$$

$$f'(x)=\ln(2)\cdot 2^{-x}-2 \quad , \quad f'(0)=\ln(2)-2$$

$$f''(x)=-\ln(2)^2\cdot 2^{-x} \quad , \quad f''(0)=-\ln(2)^2$$

$$f^{(3)}(x)=\ln(2)^3\cdot 2^{-x} \quad , \quad f^{(3)}(0)=\ln(2)^3$$

$$f^{(4)}(x)=-\ln(2)^4\cdot 2^{-x} \quad , \quad f^{(4)}(0)=-\ln(2)^4$$

Polynomiksi saadaan $P_4(x)=-\frac{\ln(2)^4}{24}\cdot x^4+\frac{\ln(2)^3}{6}\cdot x^3-\frac{\ln(2)^2}{2}\cdot x^2+[\ln(2)-2]\cdot x+1$.

<u>Vastaus</u>: $P_4(x)=-\frac{\ln(2)^4}{24}\cdot x^4+\frac{\ln(2)^3}{6}\cdot x^3-\frac{\ln(2)^2}{2}\cdot x^2+[\ln(2)-2]\cdot x+1$.