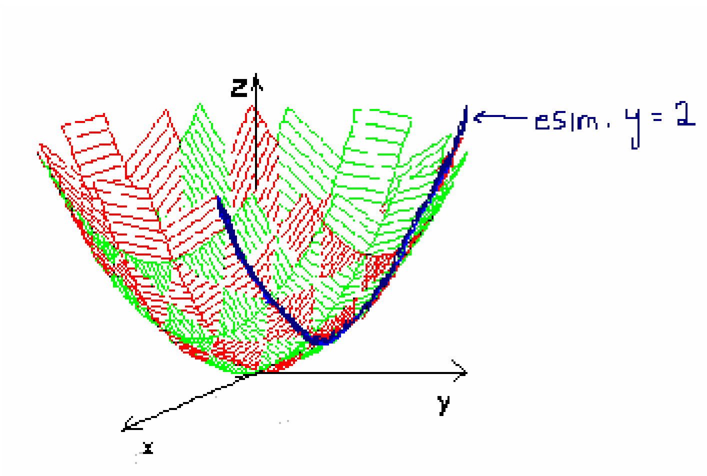
7.1 Osittaisderivaatat

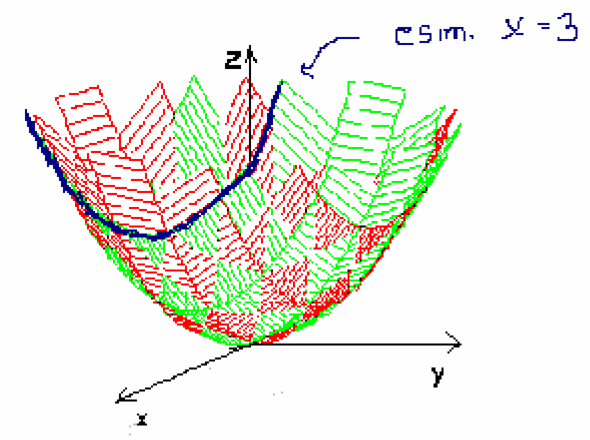
Peruskursseissa tutkittiin funktioiden kuvaajia ja niiden sovelluksia käyttäen hyväksi derivaattoja. Esimerkiksi paikalliset maksimit ja minimit löytyivät derivaatan nollakohdista, kasvavuus ja vähenevyys liittyivät derivaatan merkkiin sekä globaaliset ääriarvot funktion suurimpaan ja pienimpään arvoon.

Samalla tavoin kahden muuttujan funktioita voidaan tutkia derivaatoilla. Nyt on vain määrättävä derivaatat molempien muuttujien suhteen. Tällöin puhutaan **osittaisderivaatoista.**
Käytännössä funktion derivointi **x:n suhteen** tarkoittaa kuvaajassa käyrän ominaisuuksien tarkastelua leikkauskuviosta, missä käyrä on leikattu xz-tason suuntaisesti.



$f(x,y) = x^2 + y^2$
Kuvan leikkaaminen xz-tason suuntaisella tasolla antaa leikkauskuvioksi paraabeleja $z = x^2 + vakio$, missä vakio on y:stä riippuva y^2.
Derivaatta x:n suhteen on siten $z' = 2x$ ja on täten jokaiselle leikkauskuviolle sama, koska vakion derivaatta on nolla.

Funktion derivointi taas **y:n suhteen** tarkoittaa kuvaajassa käyrän ominaisuuksien tarkastelua leikkauskuviossa, missä käyrä on leikattu yz-tason suuntaisesti.



Funktio sama kuin edellä. Kuvan leikkaaminen yz-tason suuntaisella tasolla tuottaa jälleen paraabeleja $z = vakio + y^2$, missä vakio on x:stä riippuva x^2.
Derivaatta y:n suhteen on siten $z' = 2y$ ja on täten jokaiselle leikkauskuviolle sama samoin perustein kuin edellä.

Jatkossa keskitytään esimerkkeihin ilman kuvioita.

Osittaisderivaattoja merkitään $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y)$

Esim2. Muodosta funktion $f(x,y) = 2xy + x^2 - y^3$ osittaisderivaatat ja laske $f_x(1,3)$

Ratkaisu: $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + x^2 - y^3) = 2y + 2x$ (y on vakio)

$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + x^2 - y^3) = 2x - 3y^2$ (x on vakio)

$f_x(1,3) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$

Esim3. Laske esimerkin 2 funktion derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu: $\begin{cases} f_x(x,y) = 2y + 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2x - 3y^2 = 0 \end{cases}$ (ratkaistaan saatu yhtälöpari)

y = - x sijoitetaan alempaan yhtälöön

$2x - 3(-x)^2 = 2x - 3x^2 = 0$, josta x = 0 tai x = 2/3

Nollakohdat (x,y) = (x, - x) = (0,0) tai (2/3, - 2/3)