### Aluksi

Aloitetaan lyhyellä katsauksella geometrian historiaan. Jatketaan sen jälkeen kuvailemalla geometrian ”atomeja”, jotka ovat piste ja kulma. Johdetaan näistä lähtien muita käsitteitä kuten suora, puolisuora, jana, viiva, samankohtaiset kulmat ja ristikulmat.

Luvun lopuksi lasketaan vielä yksiköitten välisiä muunnoksia.

### Geometriakin on vain työkalu

Sanan *geometria* tarkoittaa alunperin maan mittaamista. Vanhimmat tiedot geometrian soveltamisesta ovat muinaisesta Egyptistä. *Carl Boyer* sanoo kirjassaan “Matematiikan historia I”[1]:

> Kreikkalainen historioitsija Herodotos kertoo, että Niilin tulvien hävittämät peltojen rajat loivat maanmittareiden tarpeen.

Kuten huomaat, syy oli jotain, minkä nykymaailmakin yleisesti tunnustaa eli raha.

Alkunsa jälkeen geometria ei jäänyt kehtoonsa, vaan kasvoi ja vahvistui.

### Eukleides

Eukleideen mukaan[2] geometrian perusoliot ovat: piste, suora viiva, ympyrä.

Vaikka toivonkin, että geometrian henkilögalleriasta sinulle jää mieleen lähinnä *Pythagoras*, niin Euroopan kannalta geometrian perustajana on pidettävä *Eukleidesta*. Hän muotoili nimeään kantavan geometrian *postulaatit* — Eukleideen geometrian tai euklidisen geometrian. Näitä postulaatteja on viisi kappaletta ja ne ovat[2]

- Kahta pistettä yhdistää tarkalleen yksi *jana*
- Mikä tahansa kahta pistettä yhdistävä jana on jatkettavissa molemmista päistään äärettömiin, siis niin, ettei se päädy missään ja että on sen pituus on ääretön – mitä ääretön sitten onkin.
- Valitaan piste ja jana miten tahansa, aina on olemassa ympyrä, jonka säde on valittu jana ja keskipiste on valittu piste
- kaikki suorat kulmat ovat *yhtenevät*
- (havainnollisesti tai *Playfair's axiom*[2]) Minkä tahansa suoran minkä tahansa ulkopuolisen pisteen kautta on olemassa tarkalleen yksi tämän suoran kanssa yhdensuuntainen suora

Näistä varsinkin viimeisen hylkääminen on osoittautunut hyväksi ajatukseksi, josta on versonut todella paljon uutta tietoa. Muun muassa *suhteellisuusteoria* ei tule toimeen ilman viimeisen postulaatin hylkäämistä. Toisaalta, **tällä kurssilla me pidämme tiukasti kiinni kaikista viidestä**.

### Geometrian atomeista ja muistakin olioista

Esittelen nyt oliot, joita kutsun *geometrian atomeiksi* sekä näistä johdettuja käsitteitä. Vaikka esittämäni kuvaukset ovat melko abstrakteja, ei niitä kannata vieroksua. Itse asiassa, noita geometrian atomeita voisi, ellei suorastaan pitäisi, kutsua myös *geometrian rakennuspalikoiksi*.

<u>Sinulla ennestään oleva havainnollinen kuva niistä on edelleen voimassa</u>. Esitetään tuo mielikuva nyt ihan harjoituksen vuoksi vähän muodollisemmin.

**Piste**

*Piste* on tyypillinen esimerkki matemaattisen ideaalimaailman olioista. Sillä **ei** ole

- *pituutta*. Pisteellä ei ole pituutta eikä leveyttä. Mikä sitten on piste? No tuota … se on … öh tuota … piste! Onhan se nimenomaan abstraktin ideaalimaailman olio …
- *mitään* muuta kuin sijainti.

Pisteen koko—siis sen pituus, korkeus, leveys, ala—on joka suuntaan nolla. Pisteellä on vain pelkkä sijainti!

Piste merkitään *koordinaatistoon* joko pisteellä, ristillä tai poikkiviivalla. Joskus on syytä käyttää pientä ympyrää. Viimeksi mainittu tulee kysymykseen, kun merkitset pisteen, jonka haluat nimenomaan sulkea pois tarkasteluista.

Pisteen symbolina eli nimenä käytetään isoja, aakkoston alkupään kirjaimia. **Esimerkki**: ”Tason pisteet A, B ja C määrittelevät kolmion, jos kaikki ovat eri pisteitä eivätkä ne kaikki ole samalla suoralla”.

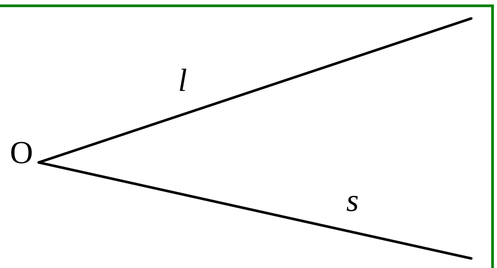
**Puolisuora**

Valitaan nyt jokin (tason) piste ja jokin suunta siitä poispäin. Laitetaan valitun pisteen viereen rinnakkain lisää pisteitä valittuun suuntaan. Laitetaan pisteet ihan tiiviisti kylki kylkeen niin, että väliin ei kerta kaikkiaan jää tyhjää. Ladotaan niitä kirjaimellisesti ilman määrää koko ajan samaan suuntaan lähtökohdasta käsin. Tuloksena on puolisuora. Puolisuoralla on siis alkupiste, mutta ei loppupistettä.

Tämä puolisuoran kuvaus käyttää pisteen käsitettä. Suunnasta puhuttaessa vilahtaa oikeastaan myös kulman käsite. Avoimeksi toisaalta jää kysymys siitä, että jos kerran pisteen suurin pituus tai leveys tai halkaisija tai mikä vaan on nolla, edetäänkö yhtään mihinkään, laitetaan noita nollan kokoisia olioita peräkkäin sitten kuinka paljon tahansa: 0 + 0 = 0.

**Esimerkkejä**

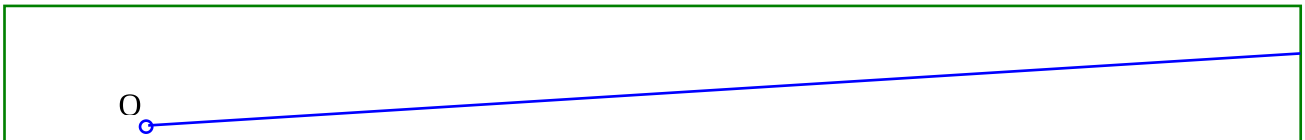
**Kuvassa 1** on kaksi (!) kulmaa, kaksi puolisuoraa *l* ja *s* ja yksi piste, piste O.




**Kuva 1**

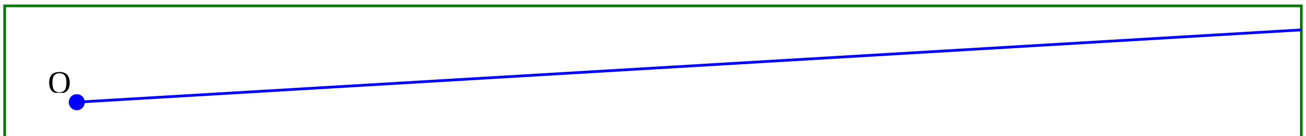
Toinen kulma on puolisuorien ”haarukan” sisään jäävä kulma, jonka *kärki* on pisteessä O ja toinen kulma on ”haarukan” puolella oleva kulma, jonka kärki on myös pisteessä O. Haarukan sisällä olevan kulman *vasen kylki* on puolisuora *l* ja *oikea kylki* on puolisuora *s*.

**Kuvassa 2** on puolisuora, jonka alkupiste O on jostain syystä suljettu tarkastelun ulkopuolelle.



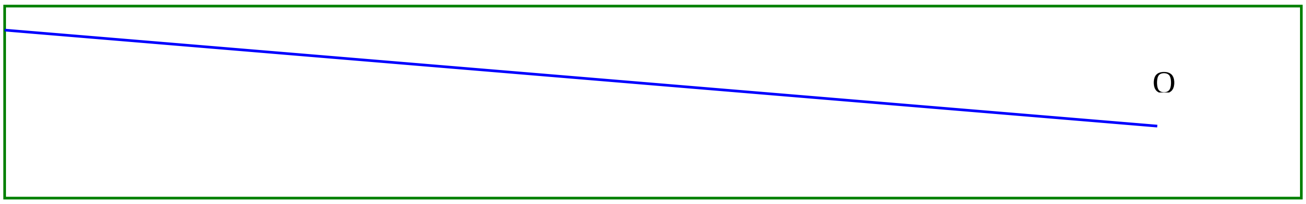

**Kuva 2**

**Kuvassa 3** on puolisuora, jonka alkupiste O on tarkastelussa mukana.




**Kuva 3**

**Kuvassa 4** on puolisuora, jonka alkupisteen O mukanaoloon ei oteta kantaa.




### Suora

Piirretään ensin puolisuora. Jatketaan sitten latomalla pisteitä alkuperäisestä lähtökohdasta käsin kuten puolisuoran tapauksessa, mutta vastakkaiseen suuntaan. Tuloksena on suora.

Tämän kurssin asia ei ole tutkia suoran käsitettä tyhjentävästi. Jos ymmärrät suoran tai puolisuoran noin periaatteessa, niin olet vahvasti ”kuivilla”: *suora* on aluton ja loputon pistejono ilman mutkia tai katkoja.

Eräs **esimerkki** suorasta on *lukusuora*. Lukusuora onkin erityisen tärkeä suora.

### Viiva

Suora on siis suora *viiva*, joka ei ala mistään eikä lopu minnekään, vaan jatkuu molempiin suuntiinsa ilman rajaa. En määrittele viivaa. Sinulla ennestään oleva viivan mielikuva riittää hyvin.

**Huomaa**, että viivan ei kuitenkaan tarvitse olla suora eikä sen tarvitse myöskään olla loputon.

Voidaan myös sanoa, että suora on eräs 1 -ulotteinen avaruus. Piste on 0 -ulotteinen avaruus, taso on 2 -ulotteinen avaruus ja meidän subjektiivinen ympäristömme ilman aikaa on 3 -ulotteinen avaruus.

### Jana

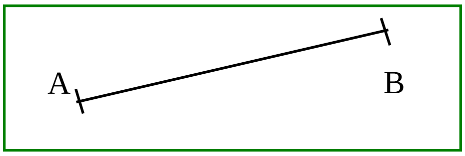
Valitaan kaksi eri pistettä, esimerkiksi pisteet A ja B ja niistä toinen, sanokaamme piste A, ”tähtäyspaikaksemme”. Tähdätään A:sta pisteeseen B. Lähdetään tähtäyssuunnan mukaisesti nyt kohti B:tä ja kulkiessamme täytetään tämä väli aukottomalla pistejonolla.

Vaikka matkaa olisi pisteitten välillä vain hiuksenpaksuuden verran, niin matemaattisia pisteitä tarvitsemme aivan valtavia määriä, määrän, jota ei enää mikään luku kuvaa.

Jos kuljimme tarkasti alkuperäisen tähtäyksen suuntaan, piirsimme pisteitten A ja B välisen lyhimmän reitin.

Sanomme piirtämäämme viivaa *janaksi* tai janaksi, jonka päätepisteet ovat A ja B tai vain janaksi AB.

Piirretään siis jana AB:




Pisteet A ja B on nyt merkitty poikkiviivoilla. Sen sijaan, että jana nimetään päätepisteittensä–kuten A ja B avulla–jana voidaan nimetä myös yksinkertaisesti keksimällä sille nimi: ”jana *a*”. Tällöin käytetään aakkoston alkupään kirjaimia kuten suorankin tapauksessa.

Eräs janan tärkeä ominaisuus on janan *pituus*. Esimerkiksi, jos janan *AB* pituus on 18 metriä, voidaan merkitä $|AB| = 18$ metriä.

**Tuloksia**

Kahden pisteen välinen lyhin viiva on näitä pisteitä yhdistävä suora viiva eli jana.

Näin ollen kahden pisteen välinen etäisyys on niitä yhdistävän janan pituus.

Eräs tärkeä suoran piirre on se, että suora voidaan määritellä kahden pisteen avulla (*Eukleides*). Toisin sanoen, jos valitaan kaksi eri pistettä, sanokaamme pisteet A ja B, on olemassa tarkalleen yksi suora, joka kulkee näitten pisteitten kautta.

Todetaan vielä kaksi yksinkertaista tosiseikkaa.

1. Kahden eri pisteen, esimerkiksi A ja B, $A \neq B$, kautta voidaan piirtää tarkalleen yksi suora.
2. A:n ja B:n välinen lyhin reitti eli jana AB on tämän suoran osa.

Voidaan esimerkiksi ajatella, että piirretään pisteiden välinen jana ja jatketaan sitä sitten molempiin suuntiin loputtomiin. Jana voidaan siis aina tulkita suoran osana.

**Kulma**

Tässä jutussa olen ehtinyt käyttää kulman käsitettä jo kuin puolivarkain, koska kulmahan on sinulle jo ennestään tuttu. Haluan kuitenkin vähän leikitellä mielikuvilla ja siksi kuvailen kulmaa tarkemmin. Toivon, että esittelemäni näkökulma tuo sinulle uusia, hyödyllisiä oivalluksia kulmasta.

*Kulma* ilmoittaa suunnan tai tarkemmin kahden suunnan välisen eron. Jotta suunta olisi ymmärrettävissä, on oltava jokin *referenssi*. Tämä tarkoittaa sitä, että on sovittava suunta, johon muita suuntia verrataan. Usein tämä on positiivinen $x$ –akseli. Tämä pätee erityisesti silloin, kun tarvitaan *suuntakulman* käsitettä.

Kulma voidaan myös määritellä sellaisena tason osana, jonka rajoittavat kaksi, samasta pisteestä alkavaa *puolisuoraa*. Puolisuoraa kuvailen seuraavassa kohdassa.

Kulmien symboleina käytetään usein kreikkalaisen aakkoston alkupään kirjaimia, kuten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ja $\delta$. Lue nämä samassa järjestyksessä ”alfa”, ”beeta”, ”gamma” ja ”delta”.

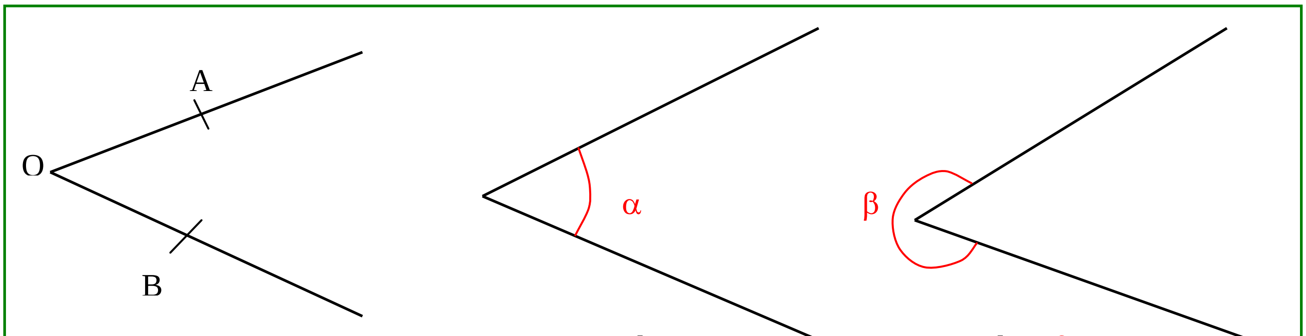
Täydellinen kreikkalainen aakkosto löytyy monista lähteistä, esimerkiksi MAOLin taulukoista[3], joiden tämän hetken (kesä 2006) uusimmassa painoksessa ne ovat sivulla 15.

Kuvittele itsesi seisomassa kulman kärjessä, kasvot kulman aukeamissuuntaan. Silloin *kulman oikea kylki on sinun kannaltasi oikealla* ja *vasen kylki vasemmalla*.

Tässä yksi, paljon käytetty mahdollisuus lisää määritellä tai nimetä kulma:

Kulma voidaan nimetä luettelemalla kolme pistettä, joista keskimmäinen on kulman kärki ja ensimmäinen piste on kulman oikealla kyljellä.

Vielä yksi mahdollisuus määritellä kulma on piirtää kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa ja sen kulman kärkien väliin kaari merkiksi siitä vaihtoehdosta, jota tarkastellaan. Oheisissa kuvissa on yksi **esimerkki** ensimmäisestä kulman määrittelytavasta ja kaksi jälkimmäisestä.




Kulma BOA Kulma $\alpha$ Kulma $\beta$

Kulma voidaan nimetä paitsi kirjoittamalla ”kulma AOB” tai ”kulma $\alpha$”, niin myös kirjoittamalla ”$\angle$AOB” tai ”$\angle\ \alpha$”.

Kulman osat ovat *kärki*, *vasen kylki* ja *oikea kylki*.

### *Kulman yksiköistä, piirtämisestä sekä erityisiä kulmia*

**Aste**

Kaikille tutuin kulman yksikkö on *aste*. Sen symboli on ° eli ylhäällä, yläindeksinomaisesti oleva ympyrä.

aste = 60 (kaari)minuuttia

(kaari)minuutti = 60 (kaari)sekuntia

eli

$1^\circ = 60'$

$1' = 60''$

Täten yksi aste on 3600 kaarisekuntia.

*Nolla astetta* on kulma, jonka vasen ja oikea kylki ovat samat: väliin ei jää kulmaa eli väliin jää nollan asteen suuruinen kulma. Kuva 3, joka nähtiin jo aiemmin, kelpaa esimerkiksi myös nolla-asteisesta kulmasta.

Otetaan sakset ja ajatellaan, että ne ovat aluksi kiinni. Saksiemme terien välinen kulma on aluksi siis nolla astetta eli 0°. Ryhdytään hitaasti avaamaan saksenteriä. Avataan niitä kunnes ne ovat niin jyrkästi toisiaan vastaan kuin mahdollista. Kuten tiedät, ne ovat tällöin *kohtisuorassa* toisiaan vastaan. Tämä on asteissa 90 eli nyt terien välinen kulma on 90°. Tätä kulmaa sanotaan *suoraksi kulmaksi*.

Unohdetaan saksien rakenteen asettamat rajoitukset ja jatketaan terien välisen kulman kasvattamista. Jatketaan kunnes saksien terät ovat toistensa jatkeena. Tällöin ne ovat saman suoran osia ja niitten välinen kulma on 180°.

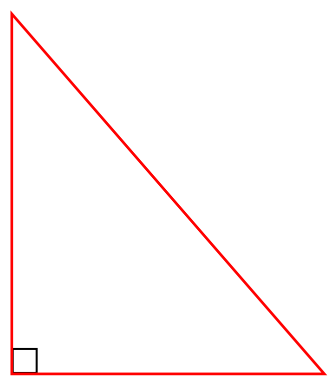
Huomaa tässä vaiheessa erityisesti, että terien kärjet osoittavat nyt vastakkaisiin suuntiin.

Käännetään saksia edelleen auki, vaikka se ei oikeitten saksien tapauksessa olisikaan enää mahdollista. Lisätään saksenkärkien välistä kulmaa viimeksi mainittuun kulmaan verrattuna 90 asteella. Saadaan kulma, jonka suuruus on 270°. Lisätään vielä 90°. Tulos on se, että saksenterät ovat kiinni ja niitten välinen kulma on 360°.

Saksenterät ovat siis kiinni, kun niitten välinen kulma on 0° tai 360°. Itse asiassa saksenterät ovat kiinni aina, kun niitten välinen kulma on mikä tahansa 360 asteen monikerta.

Kulmia, jotka on syytä huomata erikseen, olemme tähän mennessä löytäneet neljä, tulkinnasta riippuen viisikin kappaletta: 0°, 90°eli *suora kulma*, 180° eli *oikokulma* ja 360° eli *täysi kulma*.

**Huomaa**, että suora kulma merkitään kuvioon pienellä neliöllä. Esimerkki:



Pane merkille myös 270 asteen kulma, sillä 270° = 180° + 90°.

Tarkan asteluvun lisäksi kulmia vertaillaan ja nimitetään myös sen mukaan, kuinka ”jyrkkiä” ne ovat. Otetaan käyttöön seuraavat nimitykset. Huomaa koveran kulman kaksi alakohtaa.

1 **Koverat kulmat**

- a) Terävä kulma: kulma $\alpha$ on *terävä*, jos $0° < \alpha < 90°$.
- b) Tylppä kulma: kulma $\alpha$ on *tylppä*, jos $90° < \alpha < 180°$.

2 **Kupera kulma**: kulma $\alpha$ on *kupera*, jos $180° < \alpha < 360°$.

**Radiaani**

Asteen lisäksi kulman yksikkönä käytetään myös niin sanottua *absoluuttista astetta* eli *radiaania*. Radiaani määritellään usein yksikköympyrän avulla. Todetaan kuitenkin nyt vain lyhyesti, että 360 astetta on $2\pi$ radiaania. Radiaani on siis paljon isompi yksikkö kuin aste:

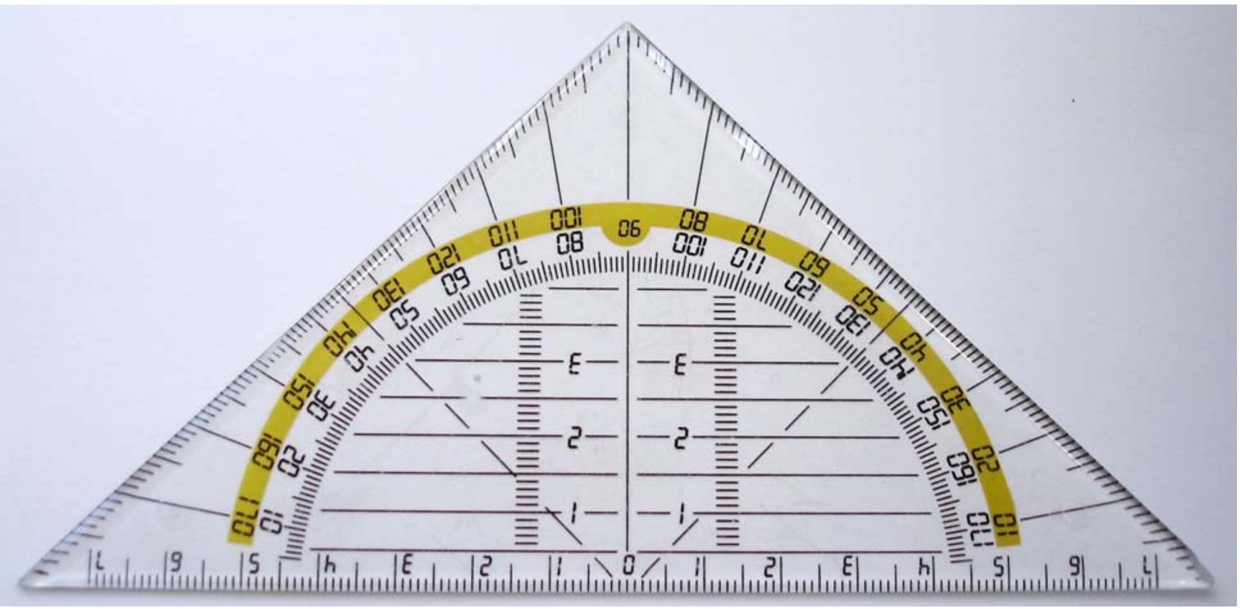
$$2\pi \text{ rad} = 360° \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57{,}3° .$$

Radiaania käytettäessä yksikköä ei yleensä merkitä. Radiaania käytetään erityisesti teknillisissä ja tieteellisissä sovelluksissa.

**Kulman mittaamisesta**

Kulman mittaamista varten on tietenkin olemassa vaikka minkälaisia välineitä. Lukiolaisen kannattaa kuitenkin valita niin sanottu *geokolmio* eli *piirtokolmio*.

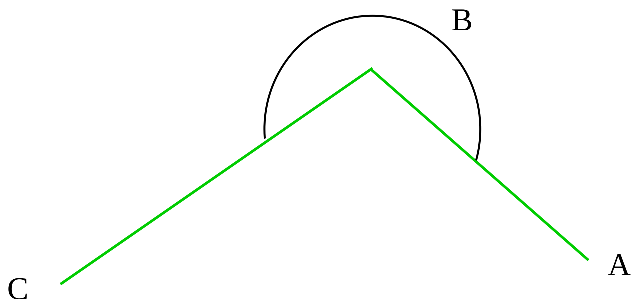
Piirtokolmio maksaa alle kaksi euroa. Erään kaupan hinta kesällä 2006 oli 1,20 euroa.



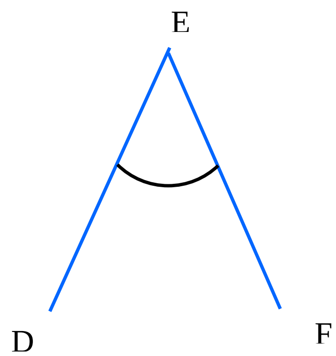
Harppi on toinen väline, joka on hyödyllinen geometriassa ja joka on hyödyllinen lisäksi usein muuallakin matematiikassa.

**Esimerkkejä**

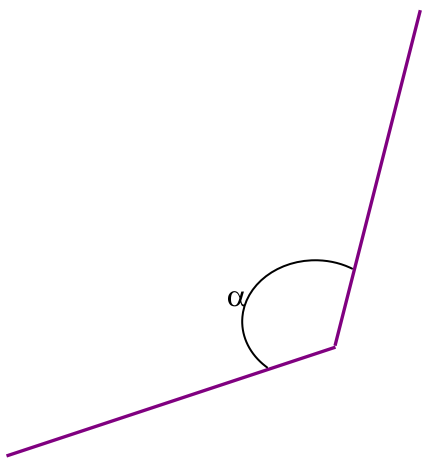
Kuvan kulma ABC on kupera. Sen oikea kylki on lyhyempi kuin vasen.




Kuvan kulma DEF on terävä.




Kuvan kulma $\alpha$ on tylppä.




Esimerkin piirrosten kulmat DEF ja $\alpha$ ovat lisäksi koveria kulmia.

**Kulman piirtämisestä**

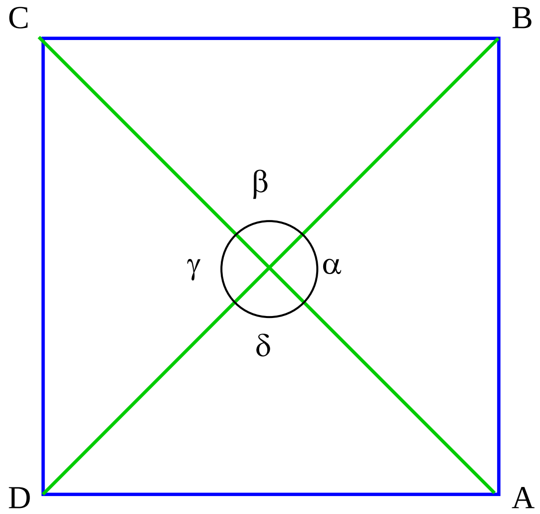
Esittelen muutamia keinoja, jotka auttavat kulmien piirtämisessä. Taito piirtää kulmia ja vähän muutakin pelkkien harpin ja viivoittimen avulla eli *geometrisesti* on hyödyllinen taito. Niitten avulla saat helposti uskottavan näköisiä kuvia. Sellaiset kuvat eivät johda sinua harhaan yhtä helposti kuin huonommat kuvat. Siksi haluan jakaa nämä tietoni sinun kanssasi. Muista toki, että **hyväkään kuva ei kuitenkaan kelpaa väitteen todistukseksi**, vaan on aina erikoistapaus.

Aloitetaan piirtämällä muutamia sellaisia kulmia, jotka saadaan jonkin helposti piirrettävän kuvion osina. Esimerkiksi neliön piirtäminen onnistuu ruutupaperilla – ainakin, jos ruudut ovat neliönmuotoisia. Useimmiten ruutupaperin ruudut ovat neliönmuotoiset, mutta eivät aina. Ruutupaperin ruutujen tavallisimmat mitat ovat $7mm \cdot 7mm$.

Piirretään ensin neliö. Sen avulla saadaan 45 ja 90 asteen kulmat. Olkoot sen kärjet A, B, C ja D *vastapäivään* alkaen oikeasta alanurkasta. Piirretään sitten janat AC ja BD kuten piirroksessa. Annetaan näitten janojen leikkauspisteelle nimi O. Koska piirroksesta on vaarassa tulla kovin sotkuinen, ei merkitä pisteen O nimeä näkyviin.

Huomaa, että:

- Myötäpäivään on suunta, johon viisarikellon viisarit liikkuvat
- Vastapäivään on viisarikellon viisarien liikkeen kanssa vastakkainen suunta




Huomaa, että piirroksessa käytetään kulmalle AOB kahta merkintää: AOB ja α. Vastaavasti kulma BOC on sama kulma kuin kulma β ja niin edelleen.

Piirroksessa on

- ∠ AOB = ∠ BOC = ∠ COD = ∠ DOA = 90°
- ∠ OBA = ∠ CBO = … = 45°. Kolme pistettä tässä tarkoittavat, että luettelo ei ole täydellinen. **Täydennä se!**
- kahdeksan suoraa kulmaa. **Etsi ja nimeä ne!**

Kuten äskeisestä huomasit, kulma ja sen suuruus samaistetaan usein ainakin merkinnöissä. Kuitenkin ne ovat periaatteessa kaksi eri asiaa. Yleensä tämä huoleton tapa ei aiheuta sekaannusta.

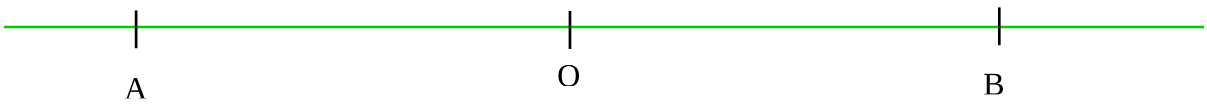
Suoran kulman eli 90 asteen kulman piirtäminen on helppoa, kun käytettävissä on ruutupaperia. Ilman ruutupaperia se on melkein vielä helpompaa! Tarvitset viivoittimen ja harpin – niin ja paperia. Tai hiekkaa, kuten ehkä Arkhimedes. Kynää et tarvitse: harpissa on kynä.

**Suorita seuraavan ohjeen mukainen piirrostehtävä!**

Aloita piirtämällä suora – tai ajan säästämiseksi ☺ ! – suoran osa. Vältän nyt sanaa 'jana', sillä ei tälle viivalle tarvitse määritellä täsmällistä alku- tai loppupistettä.

Merkitse viivalle piste, johon haluat suoran kulman. Olkoon tämän pisteen nimi O.

Avaa harpin kärkiväli "sopivaksi". Laita harpin kärki valitsemaasi pisteeseen ja piirrä valitsemasi väli harpin kärkien välinä kaarenpätkät viivalle, pisteen molemmille puolille. Nämä kaaret ovat siis samalla etäisyydellä pisteestä ja merkitsevät kaksi uutta pistettä, vaikkapa pisteet A ja B. Katso piirrosta.



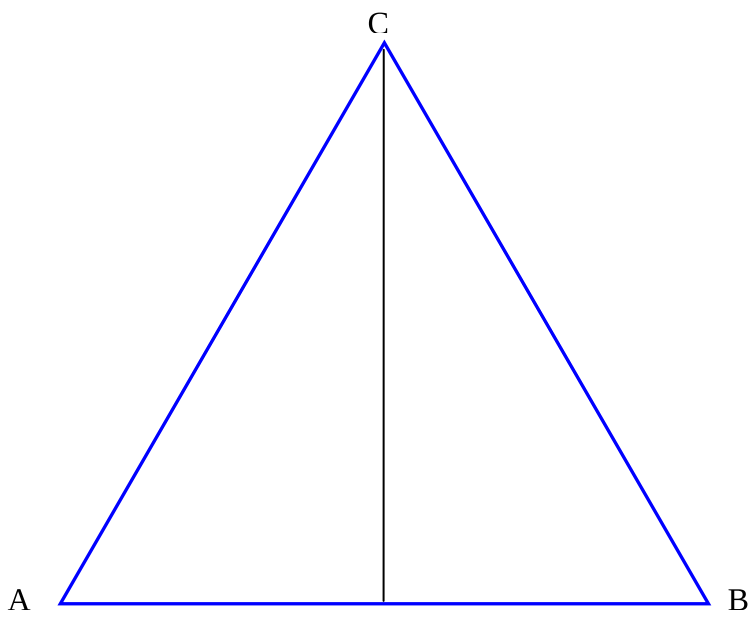

Ota nyt harpin kärkien väliksi selvästi suurempi kuin jana AO tai OB. Laita harpin kärki ensin toiseen pisteistä A ja B ja sitten toiseen ja piirrä molemmissa asemissa kaaret siten, että kaksi niistä leikkaa toisensa janan AB ala- toinen sen yläpuolella. Olkoot nämä kaksi uutta pistettä nyt pisteet C ja D. Kun nyt piirrät suoran pisteitten C ja D kautta, se leikkaa janan AB suorassa kulmassa pisteessä O. **Osaatko perustella, että kyseessä todella on suorakulma?**

Tätä suoraa, joka on kohtisuorassa janaa AB vastaan sanotaan janan AB – tai pisteitten A ja B kautta kulkevan suoran – *normaaliksi*. Koska piste O, jonka kautta piirretty kohtisuora eli normaali kulkee, on janan AB keskipisteessä, on pisteitten C ja D kautta kulkeva suora itse asiassa janan AB *keskinormaali*.

Piirretään – **sinä myös** – kolmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Sen avulla saadaan 30 ja 60 asteen kulmat.

**Piirrä** vaakasuora viiva. Valitse ja merkitse sille yksi piste, piste A. Ota sitten harpin kärkiväliksi pituus, jonka katsot olevan sopiva piirrettävän kolmion sivun pituudeksi. Säilytä valitsemasi kärkiväli ja aseta harpin kärki pisteeseen A. Piirrä harpin avulla viivalle piste B, joka on harpin kärkivälin päässä A:sta. Säilytä kärkiväli edelleen ja piirrä kaksi uutta kaarta, jotka leikkaavat pisteessä C. Toisen kaaren keskipisteenä on A ja toisen B. Koska harpin kärkiväli on koko ajan ollut sama, ovat kolmion ABC jokainen sivu tämän kärkivälin mittainen eli yhtä pitkä. Nyt kolmion jokainen kulma on 60 asteen suuruinen.

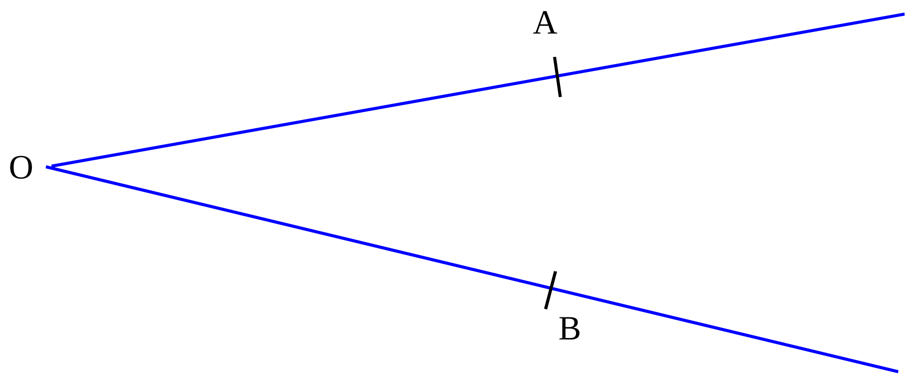
Piirrä janalle AB keskinormaali eli kohtisuora, joka leikkaa janan sen keskipisteessä. Tämä keskinormaali jakaa kulman ACB tasan kahteen yhtä suureen eli 30 asteen suuruiseen kulmaan. Olemme siis jakaneet tasasivuisen kolmiomme kahteen yhtä suureen puolikkaaseen, joiden kulmat ovat 30°, 60°ja 90°. Saimme siis vielä suoran kulman kaupanpäällisenä.




Tarkastellaan nyt piirrostekniikkaa, jonka avulla *kulman puolittaminen* harpin ja viivaimen avulla on helppoa. **Tee tämäkin itse, älä tyydy lukemaan.**

Olkoon sinulla siis kulma. Piirrän esimerkin koveran, itse asiassa terävän, kulman avulla. **Mieti**, miten puolitat kuperan kulman tällä samalla tekniikalla.

Avaa nyt harppia, jälleen sopivasti. Laita harpin kärki kulman kärkeen – olkoon se piste O -- ja merkitse harpin avulla kulman kummallekin sivulle piste. Nämä pisteet, sanokaamme A ja B, ovat nyt siis yhtä kaukana kulman kärjestä. Piirrä janan AB keskinormaali. Se puolittaa eli jakaa kulman BOA kahteen yhtä suureen osaan. **Piirrä itsellesi täydellinen kuva**, jollainen oheinen piirros ei ole**.**




Tässä piirroksessa janan AO pituus on sama kuin janan BO pituus.

Ihan oikean, suorakulmaisen kolmion muotoisen viivoittimen tekeminen on helppoa ainakin teoriassa. Piirrä kolmio, jonka sivujen suhteet ovat 3 : 4 : 5. Yksi sen kulmista on suora eli 90°. Piirretään esimerkin vuoksi yksi tällainen kolmio. Sen käytännön tarkkuus riippuu luonnollisesti siitä, kuinka huolellisesti sinä sen teet.

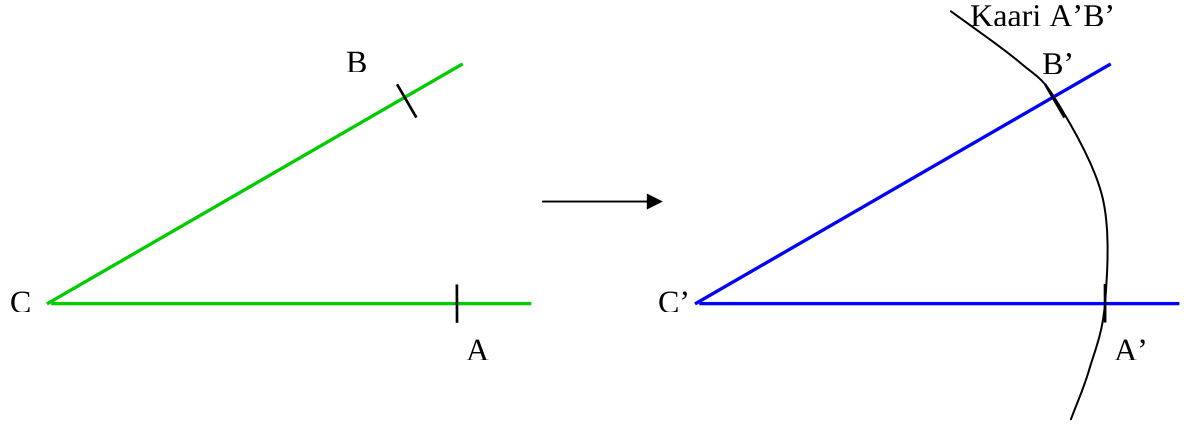
Koska ratkaisevaa on sivujen pituuksien suhde, ei sivujen pituudet itsessään, voimme valita kolmion koon meille sopivaksi. Ajatellaan, että jostain syystä kolmiomme pisimmän sivun on oltava 41 senttimetriä pitkä. Tämä sivu on siis viisi semmoista yksikköä pitkä, joita muissa sivuissa on neljä ja kolme. Muitten sivujen pituudet ovat siis $4 \cdot \frac{41}{5} cm = 32{,}8 cm$ ja $3 \cdot \frac{41}{5} cm = 24{,}6 cm$.

Aloita piirtämällä vaakasuora viiva. Valitse ja merkitse sille piste. Piirrä toinen piste samalle suoralle esimerkiksi 41 sentin päähän ensimmäisestä. Ota sitten harpin kärkiväliksi ensin vaikkapa 32,8 cm ja piirrä kaari toinen piste keskipisteenä ja sitten kärkivälinä 24,6 senttiä keskipisteenä nyt se toinen piste niin, että nämä leikkaavat. Nyt sinulla on kolme pistettä ja siis kolmio.

Eräs hyödyllinen taito on osata kopioitta kulma paikasta toiseen geometrisesti. Lähtökohtamme on siis annettu kulma, jota kutsun myös alkuperäiseksi kulmaksi.

Piirrä suora, jonka osana uuden kulman toinen kylki tulee olemaan. Valitse suoralta sitten piste, johon haluat uuden kulman kärjen, sanokaamme piste C’ (lue tämä: ’see pilkku’). Ota harpin kärkiväliksi etäisyys, joka on pienempi kuin annetun eli alkuperäisen kulman lyhyempi kylki. Laita harpin kärki alkuperäisen kulman kärkeen eli oheisen piirroksen pisteeseen C ja piirrä kulman molemmille kyljille pisteet, jotka ovat yhtä etäällä kulman kärjestä eli piirrä kaarenpätkät harpin kärkivälinä valittu väli. Annetaan pisteille nimet A ja B.

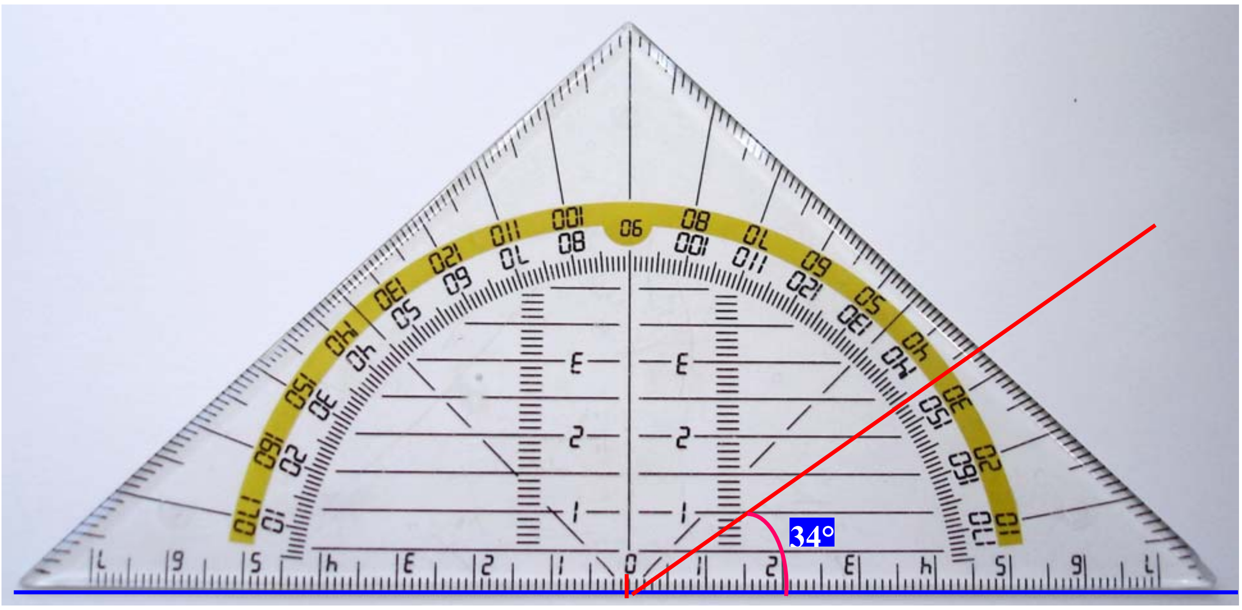
Piirrä tämä saman harpin kärkivälin avulla uuden kolmion kärki keskipisteenä kaari (kuvassa A’B’). Ota nyt harpin kärkiväliksi pisteitten A ja B etäisyys. Piirrä sitten tämä harpin kärkivälinä kaari, jonka keskipiste on uuden kulman piirroksen kaaren ja (puoli)suoran leikkauspiste. Nämä kaksi kaarta leikkaavat pisteessä, jonka voimme nimetä vaikka B’:ksi. Alkuperäisen kulman kopion vasempana kylkenä on nyt puolisuora, joka alkaa pisteestä C ja kulkee pisteen B’ kautta.




Piirretään lopuksi kaksi  kulmaa piirtokolmion avulla.

Piirretään ensin kulma, jonka suuruus on 34°. Piirtokolmiossa  on kaksi asteikkoa: keltapohjainen asteikko ja asteikko ilman taustaväriä. Kumpaa käytät, riippuu siitä, mistä alkaen luet kulmasi suuruuden. Mieti siis, missä olisi nollan asteen kokoinen kulma.

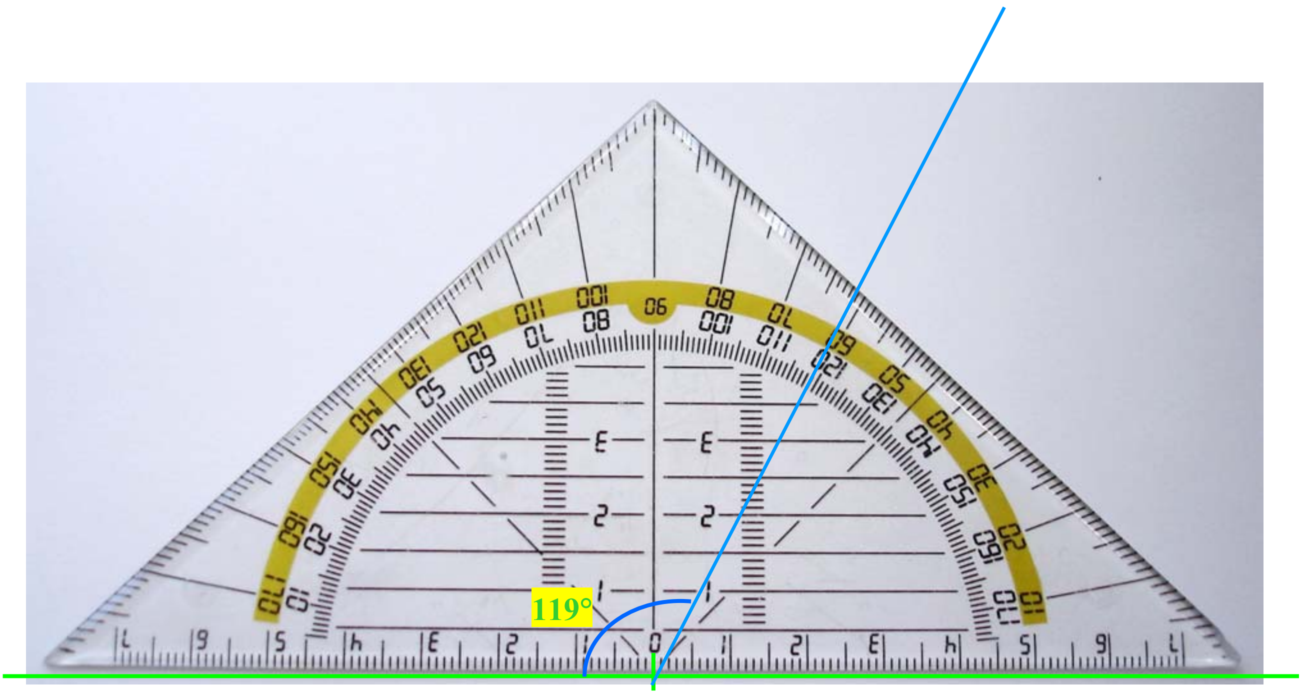
Valitaan suunta nyt niin, että kulman kärki on vasemmalla ja kulma avautuu oikealle. Aloita taas piirtämällä ensin vaakasuora. Oheisessa piirroksessa se on paksu, sininen viiva. Aseta piirtokolmio sitten niin, että sen pisin sivu (teksti oikein päin) on yhtenevä tämän suoran kanssa. Valitse piirtokolmion asema siten, että nolla astetta on oikeassa kohdassa.




Merkitsen piirroksen kulman kärjen lyhyellä, punaisella pystyviivalla. Se kuuluisi tarkalleen piirtokolmion nollan alapuolelle, mutta en tainnut osua ihan tarkasti!

Koska on tarkoitus, että meidän kulmamme avautuu oikealle, niin lue nyt keltapohjaista asteikkoa. Etsi sen avulla 34 asteen kohta piirtokolmion suoralta kyljeltä. Piirroksen punainen viiva muodostaa sinisen viivan kanssa 34 asteen kulman, joka meidän tavoitteemme olikin.

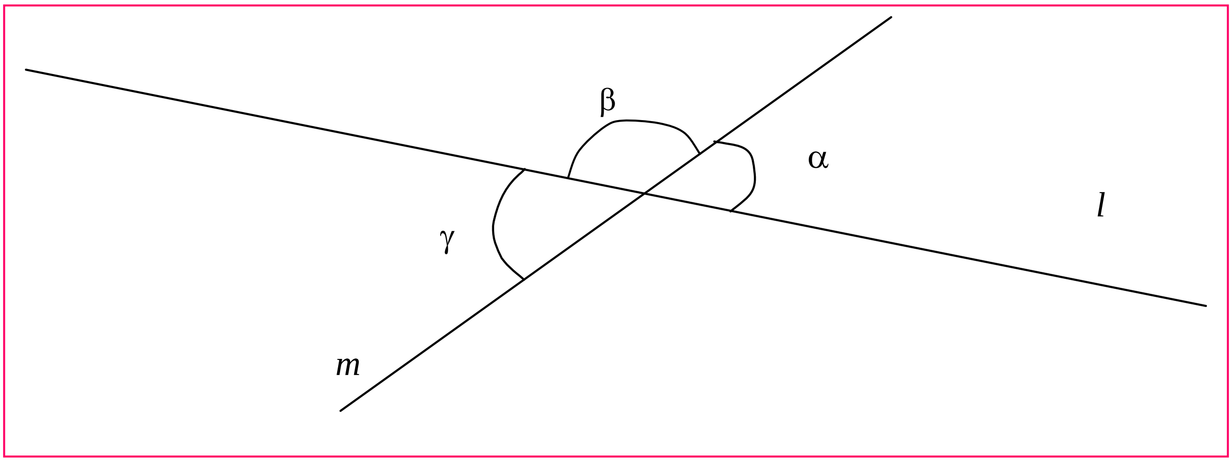
Piirrä nyt kulma, jonka suuruus on 119 astetta ja joka avautuu vasemmalle. Ohessa esimerkkipiirros. Lue nyt kirkaspohjaista asteikkoa. Jos kuitenkin luet keltapohjaista asteikkoa, piirrä kulman kylki 61 asteen merkin kautta: 180 – 61 = 119.



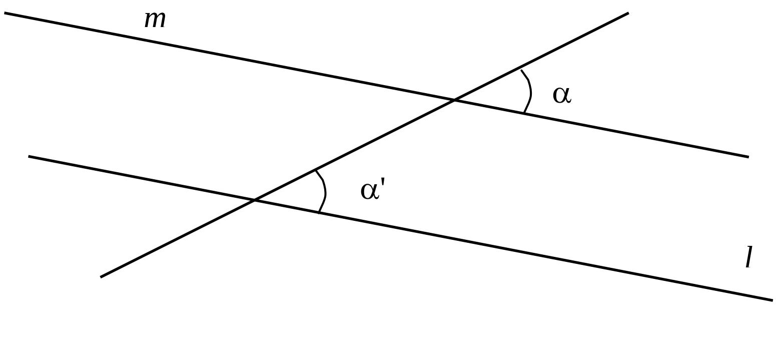

**Kulman nimi toisiaan leikkaavien suorien suhteen**

Tosiaan leikkaavat suorat määräävät myös muodostamiensa kulmien nimiä. Tämä nimeämiskäytäntö on kätevä monissa tilanteissa.

Tarkastellaan kahta toisiaan leikkaavaa suoraa *l* ja *m* sekä niitten muodostamia kulmia α, β ja γ. Tilanne esitellään oheisessa piirroksessa.




- ⌘ Piirroksen kulmat α ja γ ovat toistensa *ristikulmat*. Ristikulmat ovat aina yhtä suuret.
- ⌘ Kulmat α ja β ovat puolestaan toistensa *vieruskulmat* eli niitten summa on 180°. **Mitkä toiset** piirroksen kaksi kulmaa ovat toistensa vieruskulmat?
- ⌘ Seuraavassa piirroksessa kulmat α ja α' ovat keskenään *samankohtaiset kulmat*. Nekin ovat keskenään yhtä suuret. **Huomaa**, että piirroksen suorat *m* ja *l* ovat yhdensuuntaiset ja että samankohtaiset kulmat ovat kahden "kulmaryhmän" toisiaan vastaavat kulmat.



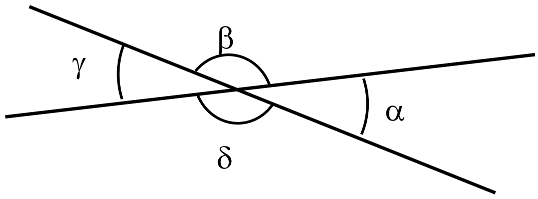

Muista seuraavat säännöt:

Yllä olevan kuvion mukaisesti leikkaavien kolmen suoran muodostaman kuvion

- ristikulmat ovat yhtä suuret
- samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret
- kahden vieruskulman summa on 180 astetta

Tarvitset näitä tietoja jatkossa. Opettele ne siis hyvin. **Muista** myös, että ne liittyvät toisensa leikkaaviin suoriin.

**Esimerkki 1**




Määritellään neljä kulmaa $\alpha, \beta, \gamma$ ja $\delta$ kuvan mukaisesti. Olkoon $\alpha = 30$ astetta. Laske muitten kulmien suuruudet.

*Ratkaisu*

Koska kulmat $\alpha$ ja $\beta$ ovat toistensa vieruskulmat, niin

$\alpha + \beta = 180°$, josta

$\beta = 150°$,

kun siis $\alpha = 30°$.

Koska kulmat $\alpha$ ja $\gamma$ ovat keskenään ristikulmat ja kulmat $\beta$ ja $\delta$ ovat keskenään ristikulmat, on

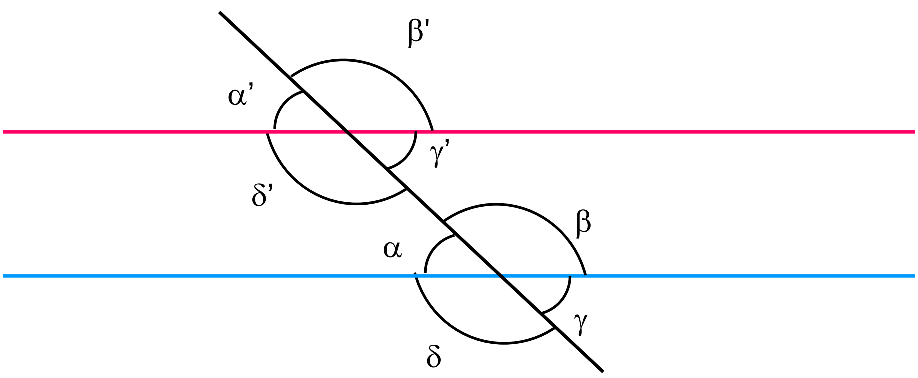
$\alpha = \gamma$ ja $\beta = \delta$,

joten

$\gamma = 30°$ ja $\delta = 150°$.

<u>Vastaus</u>: $\beta = 150°$, $\gamma = 30°$ ja $\delta = 150°$.

**Esimerkki 2**



Määritellään tilanne jälleen kuvan avulla. Kulman $\alpha$ suuruus on 60º. Määritä kuvan muitten kulmien suuruudet.

Kulmat $\alpha$ ja $\beta$ ovat toistensa vieruskulmia, joten niitten summa on 180º ja kulman $\beta$ suuruus on siis 120º. Myös $\beta$ ja $\gamma$ ovat vieruskulmia, joten $\gamma$:n suuruus on 60º – eli sama kuin $\alpha$:n suuruus. Vastaavalla tavalla $\delta$:n suuruudeksi saadaan 120º.

Esimerkiksi kulmat $\alpha$ ja $\alpha'$ ovat toistensa vastinkulmat, koska kulmien vasempina kylkinä on yhdensuuntaiset suorat ja oikeana kylkenä on sama suora. Nämä kulmat ovat siis yhtä suuret. Vastaavalla tavalla nähdään, että $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ ja $\delta = \delta'$.

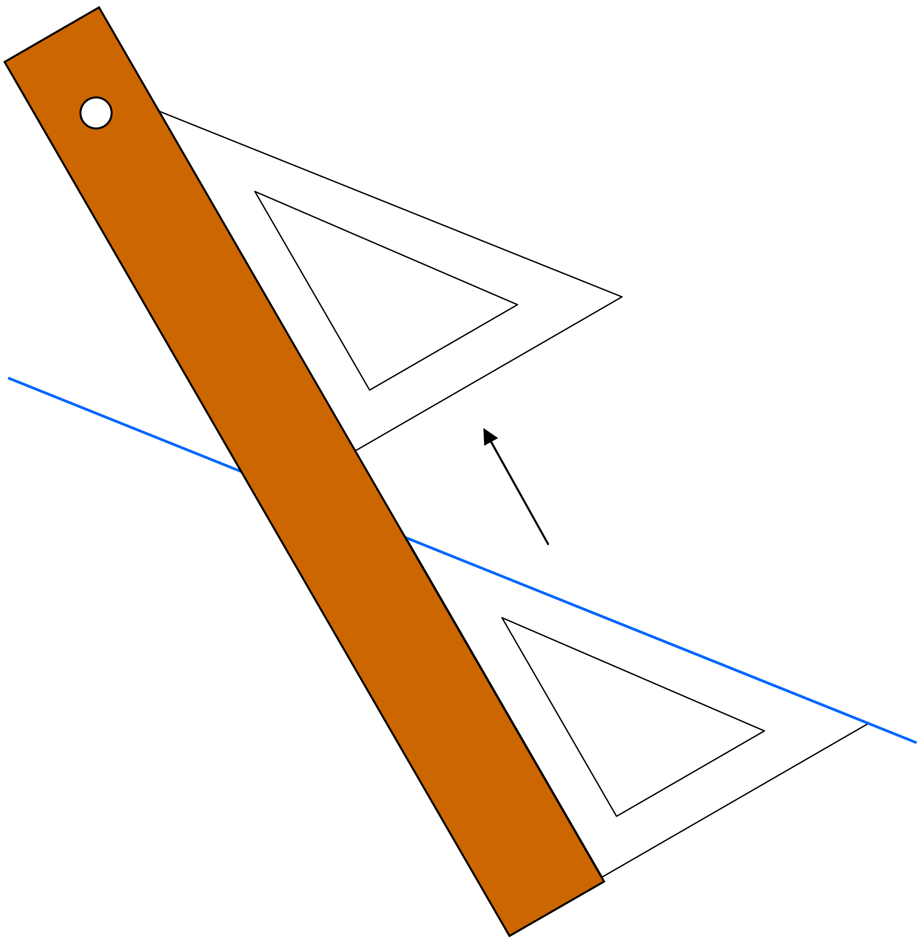
<u>Vastaus</u>: $\gamma = \alpha = \alpha' = \gamma' = 60°$ ja $\beta = \delta = \delta' = \beta' = 120°$.

Eteen tulee toisinaan tilanne, jossa on kätevää osata piirtää suora, joka on mahdollisimman tarkoin yhdensuuntainen annetun suoran kanssa. Tarvitset tähän työhön tavallisen viivaimen ja kolmioviivaimen. Toki myös piirtokolmio kelpaa hyvin tavallisen viivaimen seuraksi.

Aloitetaan tilanteesta, jossa sinulla on suora ja haluat piirtää toisen suoran, joka on yhdensuuntainen sen kanssa.

Aseta kolmioviivoitin niin, että sen pisin sivu on yhtenevä annetun suoran kanssa. Piirroksessa sininen viiva esittää annettua suoraa.

Aseta toinen viivoitin siten, että se on tarkasti kolmioviivoittimen yhden kyljen suuntainen ja nojaa siihen. Pidä tämä ”toinen viivoitin” tarkasti paikoillaan kun siirrät (nuoli piirroksessa) kolmioviivoittimen toista sivua pitkin ja sen ohjaamana kohtaan, johon haluat uuden suoran. Ja sitten vain piirrät sen suoran kolmioviivoittimen avulla!



Jaetaan vielä geometrisesti annettu jana osiin annetussa kokonaislukusuhteessa.

Olkoon meillä jana AB. Se pitäisi jakaa osiin, joiden pituuksien suhde on 2 : 3.

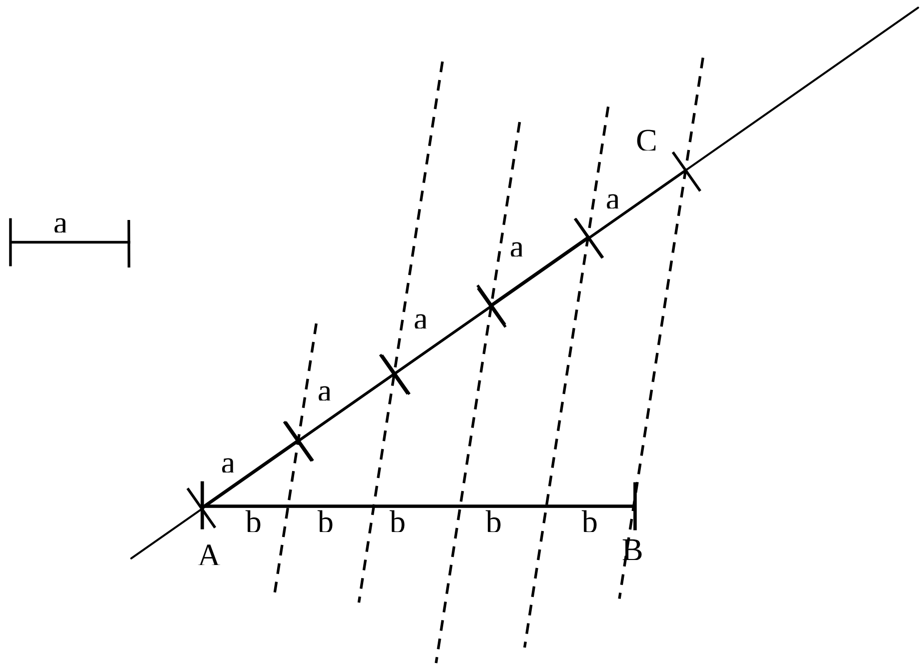
Aloitetaan janan osiin jakaminen piirtämällä puolisuora, joka alkaa janan toisesta päätepisteestä. Valitaan piste A.

Valitaan jokin jana harpin kärkien väliin. Annetaan sille nimi a. Älä valitse liian pitkää janaa, sillä tarkoitus on laittaa niitä viisi kappaletta peräkkäin.

Alkuperäinen jana on jaettava suhteessa 2 : 3. Koska 2 + 3 = 5, niin piirretään nyt tämä harpin kärkienväliin valittu matka viiteen kertaan peräkkäin puolisuoralle alkaen pisteestä A.

Haluat ehkä erikseen piirtää viivaimella janan a ja kopioitta se sitten viiteen kertaan ohjeen mukaisesti.

Viides jana päättyy johonkin pisteeseen. Annetaan sille nimeksi C. Piirretään suora, joka kulkee pisteitten B ja C kautta. Piirretään lopuksi janan a viiden kopion kustakin jäljellä olevasta päätepisteestä suoran BC suuntaiset (puoli)suorat, jotka leikkaavat janan AB. Jana AB on nyt jaettu viiteen, yhtä pitkään osaan. Annetaan niillekin nimi: b. Ota toiseen pyydettyyn osaan näitä kaksi, toiseen kolme kappaletta.




**Huomaa**, äskeiset ”nimet” a ja b ovat ennemminkin kyseisten janojen pituuksia eivätkä oikeastaan nimiä. Tässä asiassa emme ole kovin tarkkoja.

### *Yksiköitten välisistä muunnoksista*

Koska olet jo ehtinyt laskea erilaisia yksiköitten välisiä muunnoksia ja käyttää erilaisia mittayksiköitä muutenkin, tämä luku on kertausta. Siksi en ole kovin tarkka siitä, vaikka aikayksikkö tai muu sellainen ”lipsahtaa” mukaan tehtävään, joka on tarkoitettu pituusmittojen kertaamiseen.

**Pituuden, pinta-alan, tilavuuden ja vetoisuuden yksiköistä**

Yksikköjen välisissä muunnoksissa **asianmukainen kerroin** eli **suhdeluku** on avainasemassa. Siitä huolimatta, että kerroin tuo mieleen kertomisen, näet kohta, että yksikköjä muunneltaessa kertoimella joudutaan jakamaan yhtä usein kuin kertomaan. Sana *kerroin* on siis tulkittava pelkkänä nimenä. Voidaankin puhua yksiköitten välisestä muunnoskertoimesta, jolla siis joudutaan myös jakamaan. Tai voit käyttää sanaa *suhdeluku*.

Kumpi operaatio sitten valitaan, jakaminen vai kertominen, riippuu siitä, muunnetaanko pienempää yksikköä isommaksi vai päinvastoin. Operaation valitseminen ei yleensä ole ongelma. Mahtuuhan esimerkiksi samaan matkaan millimetrejä enemmän kuin kilometrejä tai virvoitusjuomatölkkiin isoja kuutiometrejä paljon vähemmän kuin pienempiä senttilitroja.

**Esimerkiksi** tavallisen juomatölkin tilavuus on 33 senttilitraa eli 3,3 kymmenestuhannesosaa kuutiometriä.

Koska yksi kuutiometri on yhtä iso tilavuus kuin 100 000 senttilitraa, näitten nimenomaisten yksiköitten välinen muunnoskerroin on 100 000 eli $10^5$. Jos siis muunnat kuutiometrejä senttilitroiksi, kerrot tällä kertoimella, jos taas senttilitroja kuutiometreiksi, jaat tällä samalla kertoimella:

$$\frac{3{,}3}{10000}m^3 = 10^5 \cdot \frac{3{,}3}{10000}cl = 33cl$$

ja

$$33cl = \frac{33}{10^5}m^3 = \frac{3{,}3}{10^4}m^3 .$$

**Mistä kerroin**

Mistä sitten saatiin tuo äskeisen muunnoksen kerroin 100 000? Lähtökohta meidän käytössämme olevassa *yksikköjärjestelmässä*, niin sanotussa *SI -järjestelmässä*, on että saman *suureen* – matka on eräs suure – <u>eri yksiköitten välinen muunnoskerroin tai suhde on 10 tai jokin sen kokonaislukupotenssi</u>. <u>Suuruusjärjestyksessä lueteltujen, saman suureen yksiköitten, kahden peräkkäisen yksikön välinen muunnoskerroin on yleensä 10</u>.

Tutki seuraavaa luetteloa ja etsi ne luettelon alueet, missä muunnoskerroin on 1000.

Kilometrin ja metrin väliltä luettelosta puuttuvat siihen oikeastaan kuuluvat *hehtometri* = 100 metriä, lyhenne *hm* ja *dekametri* = 10 metriä, lyhenne *dam*. Vastaavat kertoimet ovat kerrointen luettelossa. On makuasia, otatko tämän alueen mukaan, kun etsit ne alueet, joissa muunnoskerroin on 1000 eikä 10.

Luettelen **esimerkkinä** ensin *metristä* johdettuja pituuden *kerrannaisyksiköitä*. Niitä käytetään, kun mitataan etäisyyksiä, pituuksia, matkoja ja niin edelleen. Ne saadaan <u>jakamalla</u> tai <u>kertomalla</u> metri jollain 10:n potenssilla.

*Metrin johdannaisyksikkö* taas tarkoittaa sitä, että lähtökohtana on metri, jonka suuruus on tarkoin määritelty. Metrin johdannaisyksiköt <u>määritellään</u> metrin avulla.

**Seuraavan taulukon sisältö on syytä opetella ulkoa**. Se kuuluu varsinkin jokaisen lukion käyneen yleissivistykseen. Taulukko etenee pienemmästä suurempaan.

**Taulukon lukuohje**

Kun luet ensin vasemmasta pystysarakkeesta ”desimetri [dm]” ja sitten haet yläriviltä kohdan ”metri [m]”, niin näitten risteyskohdasta näet, että yksi desimetri on $\frac{1}{10}$ metriä. Vastaavalla tavalla näet 1. pystyrivin ja viimeisen vaakarivin avulla, että yksi *valovuosi* on (suunnilleen) $9{,}46 \cdot 10^{18}$ millimetriä.

| ⌘ | nanometri [nm] | mikrometri [μm] | millimetri [mm] | senttimetri [cm] | desimetri [dm] | metri [m] | kilometri [km] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nanometri [nm] | 1 | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | | | |
| mikrometri [μm] | $10^3$ | 1 | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | | | |
| millimetri [mm] | $10^6$ | $10^3$ | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{1000000} = 10^{-6}$ |
| senttimetri [cm] | $10^7$ | $10^4$ | 10 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{100000} = 10^{-5}$ |
| desimetri [dm] | $10^8$ | $10^5$ | 100 | 10 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10000} = 10^{-4}$ |
| metri [m] | $10^9$ | $10^6$ | 1000 | 100 | 10 | 1 | $\frac{1}{1000}$ |
| kilometri [km] | $10^{12}$ | $10^9$ | 1000000 $= 10^6$ | 100000 $= 10^5$ | 10000 $= 10^4$ | 1000 | 1 |
| valovuosi | | | $\approx 9{,}46 \cdot 10^{18}$ | $\approx 9{,}46 \cdot 10^{17}$ | $\approx 9{,}46 \cdot 10^{16}$ | $\approx 9{,}46 \cdot 10^{15}$ | $\approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ |

Tutki muutkin tämän luvun taulukot. Olen kerännyt niihin muut yleissivistykseen kuuluvat yksiköt. Muista etuliitteiden käyttö ja etuliitteiden taulukko, joka on aihion lopussa, juuri ennen lukua *Keskeisiä käsitteitä*.

Aloitetaan *pinta-alojen yksiköitten* tarkasteleminen metrillä, joka on pituusmitta. Tarkastellaan aluetta, joka on neliön muotoinen ja jonka kaikki sivut ovat metrin mittaiset. Neliön alahan lasketaan kertomalla sivujen pituudet keskenään. Sivujen pituuden tulo on nyt $1m \cdot 1m = 1m^2$. Sellaisen neliön ala, jonka sivun pituus on metri, on siis $1m^2$ eli yksi *neliömetri*.

Kuten pinta-alan yksiköt, myös *tilavuuden yksiköt* ja lopulta *vetomitatkin* johdetaan pituusyksiköistä.

Kuutio on sinulle ennestään tuttu nimi. Koska kuutionmuotoisen kappaleen *tilavuus* lasketaan kertomalla *särmien* pituudet keskenään, on sellaisen kuution tilavuus $1m^3$, jonka jokainen särmä on metrin mittainen.

Yleistän nyt näitten kolmen suureen tarkastelun tulokset – pituus, pinta-ala ja tilavuus. Pituuden yksikkö on metrin tai jonkin muun pituusmitan ensimmäistä potenssia, pinta-alan yksikkö on metrin tai jonkin muun pituusmitan **toista** potenssia ja tilavuuden yksikkö metrin tai jonkin muun pituusmitan **kolmatta** potenssia. Vetomitat kuten litra palautuvat tähän samaan asiaan.

Älä siis koskaan tarjoa pinta-alan yksiköksi senttimetriä!

Yksiköt antavat myös vihjeen niistä laskuoperaatioista, joita tehtävän ratkaisemiseksi tarvitaan. Tilavuutta laskiessasi joudut ennemmin tai myöhemmin kertomaan tai jakamaan lukuja keskenään niin, että tuloksessa on mukana pituusmitan kuutio, pinta-alaa laskiessasi vastaavasti yksiköksi on tultava pituusmitan neliö.

Lasketaan nyt esimerkkejä yksikönmuunnoksista. Sitten tiivistetään yksiköt ja niitten väliset muunnoskertoimet taulukkoon. Luvun loppuun olen laatinut luettelon tieteellisessä ja teknisessä käytössä olevista etuliitteistä. Sieltä löydät tavallisimpien millin, sentin, desin ja kilon lisäksi monta muuta etuliitettä, joihin törmäät kirjallisuudessa ja sanomalehdissä.

Luvun lopun taulukosta näet, että sana *desi* tarkoittaa kymmenesosaa. Tosin sanoen $d = 10^{-1} = \frac{1}{10}$, kun tuo *d on etuliitteenä*. Täten yksi *desimetri* on sama matka kuin yksi kymmenesosa metriä ja yksi metri on kymmenen desimetriä. Tätä tietoa tarvitsemme heti ensimmäisessä esimerkissä.

**Esimerkki 3**

Kuten edellä totesimme, sellaisen kuution tilavuus, jonka sivu on yksi metri, on $1m \cdot 1m \cdot 1m = m^3$ eli yksi *kuutiometri*. Koska metri on toisaalta 10 desimetriä, äskeisen kuution tilavuus on myös $10dm \cdot 10dm \cdot 10dm = 1000dm^3$. Saadaan siis:

$$1m^3 = 1000dm^3.$$

Toisaalta tiedetään vielä, että $1dm^3$ **= 1 litra**. Siis

$$\boxed{1m^3 = 1000l} = \text{tuhat litraa.}$$

Litran tunnus on pieni l.

Ja vielä: Koska **yksi litra vettä painaa yhden kilon**, niin yksi kuutiometri vettä painaa tuhat kiloa eli *tonnin*.

**Esimerkki 4**

*Nanoteknologialla* tarkoitetaan tekniikkaa, jonka edustajat rakentelevat koneita, joiden mitat ovat tyypillisesti joitakin kymmeniä nanometrejä. Kuinka monta metriä on 100 nanometriä eli 100 nm?

*Ratkaisu*

Yksi nanometri on $10^{-9}$ metriä eli metrin yksi miljardisosa. Tällöin sata nanometriä on

$$100 \cdot 10^{-9}m = 10^2 \cdot 10^{-9}m = 10^{+2-9}m = 10^{-7}m.$$

Sata nanometriä on siis yksi kymmenesmiljoonasosa metriä.

<u>Vastaus</u>: Sata nanometriä on yksi kymmenesmiljoonasosa metriä.

Tiivistän seuraavaan taulukkoon tilavuus- ja vetomittojen välisiä yhteyksiä. Tutki taulukkoa ja jos huomaat, että jokin taulukossa mainittu tieto on päässyt sinulta unohtumaan, <u>kertaa taulukon tiedot huolellisesti</u>. Jatkossa seuraa lisää taulukoita. Tutki nekin erittäin huolellisesti, jotta löydät ja voit <u>korjata mahdolliset aukot tiedoissasi</u>.

**Taulukko: tilavuus– ja vetomittojen välisiä yhteyksiä**

| | $cm^3$ | $dm^3$ | $m^3$ | dl | l |
|---|---|---|---|---|---|
| $cm^3$ | 1 | $\frac{1}{1000}=10^{-3}$ | $\frac{1}{1000000}=10^{-6}$ | $\frac{1}{100}=10^{-2}$ | $\frac{1}{1000}=10^{-3}$ |
| $dm^3$ | $1000 = 10^3$ | 1 | $\frac{1}{1000}=10^{-3}$ | 10 | 1 |
| $m^3$ | $1000000 = 10^6$ | $1000 = 10^3$ | 1 | $10000 = 10^4$ | $1000=10^3$ |
| ml | 1 | $\frac{1}{1000}=10^{-3}$ | $10^{-6}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ |
| cl | 10 | $\frac{1}{100}$ | $10^{-5}$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ |
| dl | 100 | $\frac{1}{10}$ | $10^{-4}$ | 1 | $\frac{1}{10}$ |
| l | $1000 = 10^3$ | 1 | $\frac{1}{1000}=10^{-3}$ | 10 | 1 |

Arkikielessä emme yleensä sano ”kuutiosenttimetri”, vaan ”kuutiosentti”.

**Esimerkki 5**

Jos $1dm^3$ = 1 litra, niin kuinka monta kuutiosenttiä on 2,5 *desilitraa*?

*Ratkaisu*

Koska desi tarkoittaa kymmenesosaa, niin yksi desilitra on yksi kymmenesosa litraa. Täten 2,5 desilitraa on 2,5 kymmenesosaa litraa ja

$$
\begin{aligned}
\frac{2{,}5}{10} l &= \frac{2{,}5}{10} dm^3 \\
&= \frac{2{,}5}{10} (dm)^3 \\
&= \frac{2{,}5}{10} (10cm)^3 \\
&= \frac{2{,}5}{10} \cdot 1000 (cm)^3 \\
&= \frac{2{,}5 \cdot 1000}{10} cm^3 \\
&= 250 cm^3
\end{aligned}
,
$$

sillä koska $1dm = 10^{-1} m$ ja $1cm = 10^{-2} m$, niin $1dm = 10cm$.

<u>Vastaus</u>: 2,5 desilitraa on 250 kuutiosenttiä.

**Huomaa** eräänlainen merkinnällinen epäjohdonmukaisuus: kun kirjoitetaan $dm^3$, tarkoitetaan itse asiassa $(dm)^3$. Tämä käytäntö ei aiheuta sekaannusta ja on tapana kaikissa vastaavissa tilanteissa. Koska tämäkin seikka on syytä tiedostaa, mainitsen sen tässä erikseen.

**Esimerkki 6**

Yksi *tuuma* on 25,4 millimetriä. Kuinka monta litraa on sellaisen moottoripyörän iskutilavuus, jonka iskutilavuus kuutiotuumissa on 82?

*Ratkaisu*

Koska yksi tuuma = 25,4 mm = 2,54 cm, niin

$$\begin{aligned} 82tuuma^3 &= 82 \cdot (2{,}54cm)^3 \\ &= 1343{,}7cm^3 \\ &= 1{,}344l \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty iskutilavuus on noin 1,344 litraa.

**Esimerkki 7**

Tyypillisen, laborantin käyttämän pipetin tilavuus on 10 millilitraa. Oletetaan, että laborantti käyttää 10 sekuntia aikaa, kun hän ottaa ämpäristä yhden pipetillisen nestettä ja siirtää sen toiseen. Kuinka kauan kestää kahdeksan litran vetoisen ämpärin tyhjentäminen tällä vauhdilla?

*Ratkaisu*

Koska laborantti ottaa 10 millilitraa eli 10 milliä (!) 10 sekunnissa, hän ottaa yhden millin sekunnissa. Kahdeksassa litrassa on 8000 milliä. Aikaa menee siis 8000 sekuntia. Koska yksi tunti on $60 \cdot 60$ sekuntia eli 3600 sekuntia, on 8000 sekuntia kaksi tuntia 800 sekuntia. Koska 800 sekuntia on puolestaan 13 minuuttia 20 sekuntia, aikaa menee yhteensä kaksi tuntia 13 minuuttia ja 20 sekuntia.

Vastaus: Kahdeksan litran ämpärin tyhjentäminen kestää 2 h 13 min ja 20 s.

Tyypillinen pituusmittojen välinen muunnoskerroin kahden peräkkäisen mitan välillä on siis kymmenen. Edellä jo viitattiin siihen, että *tästä seuraa* sellainen tosiseikka, että kahden peräkkäisen pinta-alan yksikön välinen muunnoskerroin on tyypillisesti 100 eli $10^2$. Vastaavasti, pituusyksiköstä johdettujen tilavuusmittojen välinen muunnoskerroin on tavallisesti $10^3 = 1000$.

Tähän sopii kolme taulukkoa, jossa ensimmäisessä on pituusmitoista johdettuja pinta-alan yksikköjä ja toisessa pituusmitoista johdettuja tilavuuden yksikköjä. Ne ovat jälleen pienemmästä suurempaan.

Kolmannessa taulukossa on vetomittoja pienemmästä suurempaan. Niitten välinen muunnoskerroin peräkkäisten yksiköitten välillä on 10, sillä nehän muodostetaan etuliitteen avulla litrasta. Tästä seuraa, että sinä pystyt helposti laajentamaan tätä minun laatimaani taulukkoa molempiin suuntiin.

| |
|---|
| $mm^2$ |
| $cm^2$ |
| $dm^2$ |
| $m^2$ |
| $dam^2$ |
| $hm^2$ |
| $km^2$ |

| |
|---|
| $mm^3$ |
| $cm^3$ |
| $dm^3$ |
| $m^3$ |
| $dam^3$ |
| $hm^3$ |
| $km^3$ |

| |
|---|
| ml |
| cl |
| dl |
| **l** |
| dal |
| hl |

Lyhenne *dal* on *dekalitran* lyhenne ja *hl* on *hehtolitran* lyhenne.

Muistutan vielä, että yksi kuutiodesimetri on yhtä suuri tilavuus kuin yksi litra. Tästä tiedosta lähtien, jonka mainitsin edellä jo esimerkissä 1, voit laskea muut yhteydet.

Muista myös, että yksi kilogramma **vettä** painaa yhden kilon ja että yksi kuutiosentti ($1cm^3$) **vettä** painaa yhden gramman.

**Muita yksiköitä: aika, nopeus, massa ja tiheys**

Tarkastellaan vielä ajan, nopeuden, massan ja tiheyden yksiköitä.

*Ajan yksiköt* eroavat muusta siinä, että muunnoskerroin ei ole 10 yhtään kertaa! Taulukosta näkyy, että kerrointen valikoima on aika kirjava. Tärkeää on muistaa, että päivässä (d) on 24 tuntia (h) ja tunnissa 60 minuuttia ja minuutissa 60 sekuntia. Kun vielä muistat, että vuodessa on 365 tai 366 päivää, niin olet hyvässä alussa.

| | s | min | h | d | a |
|---|---|---|---|---|---|
| s | 1 | - | - | - | - |
| min | 60 | 1 | - | - | - |
| h | 3600 | 60 | 1 | - | - |
| d | 86400 | 1440 | 24 | 1 | - |
| a | 31556925,9747 | 525948,766245 | 8765,81277075 | 365,242198781 | 1 |

*Nopeuden yksiköt* lähtevät liikkeelle nopeuden määritelmästä. Nopeus on matka jaettuna ajalla, joka tätä matkaa on kuljettu.

Auton nopeus ilmoitetaan usein kilometreinä tunnissa. Sanomalla vaikkapa, että nopeus on 80 kilometriä tunnissa eli 80 km/h (eli 80 kph) tarkoitetaan, että yhden tunnin ajon jälkeen ollaan 80 kilometrin päässä. Voidaan siis sanoa että *kilometriä tunnissa* on eräs nopeuden yksikkö.

Toinen paljon käytetty nopeuden yksikkö on *metriä sekunnissa*. Sitä käyttävät monen muun teknisen tai tieteen alan edustajien mukana myös meteorologit.

**Esimerkki 8**

Kuinka monta kilometriä tunnissa on yksi metri sekunnissa?

*Ratkaisu*

Yksi metri sekunnissa = $1\frac{m}{s} = \frac{\frac{km}{1000}}{\frac{h}{3600}} = 3{,}6\frac{km}{h}$.

Vastaus: Yksi metri sekunnissa = 3,6 kilometriä tunnissa.

Saadaan tulokset

$$\boxed{1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}}$$

ja

$$\boxed{1\frac{km}{h} = \frac{1}{3{,}6}\cdot\frac{m}{s}}$$

Kannattaa panna merkille, että **m/s on isompi yksikkö kuin km/h**. Tämä auttaa muistamaan, milloin kerrotaan, milloin jaetaan 3,6:lla.

**Esimerkiksi** kertomalla ensimmäinen noista kahdesta säännöstä 20:lla saadaan, että 20 m/s = 72 km/h ja kertomalla jälkimmäinen 90:llä saadaan, että 90 km/h = 25 m/s.

**Esimerkki 9**

Valon nopeus, josta käytetään kansainvälisesti symbolia c, on täsmälleen 299 792,458 km/s. Valo tulee Auringon pinnalta Maahan 499,004881570 sekunnissa. Tähtitieteilijät käyttävät tästä ajasta merkintää $\tau_A$.

Kuinka kauan tähän matkaan tarvitsisi auto, jonka keskinopeus on 80 km/h?

Tämän esimerkin lukuja ei tarvitse muistaa. Yleissivistykseen toisaalta kuuluu tietää, että valonnopeus on suunnilleen 300 000 km/s.

*Ratkaisu*

Tämän tehtävän voisi ratkaista niin, että laskee ensin Maan ja Auringon etäisyyden ja siitä edelleen kysytyn ajan. Minä en nyt tee niin.

Aikayksikössä ehdittävä matka on suoraan verrannollinen nopeuteen. Kertaa verrannollisuus tarvittaessa MAB1:n 7. aihiosta.

Tarvittava aika *t* on siis

$$\begin{aligned} t &= \frac{299792{,}458\frac{km}{s}}{80\frac{km}{h}} \cdot 499{,}004881570 \\ &\approx 6731905499{,}9999 s \\ &\approx 213 a \end{aligned}$$

Vastaus: Kahdeksankympin nopeudella matka Maa – Aurinko kestää noin 213 vuotta.

**Esimerkki 10**

Matti Matkalainen teki matkan. Aloitamme asian tarkastelemisen siitä, kun Matti käveli yhden tunnin ja 12 minuuttia nopeudella 6 km/h. Sitten hän lensi 4,5 tuntia nopeudella 950 km/h ja käveli 15 minuuttia nopeudella 1,5 m/s. Lopuksi hän ajoi taksilla 48 minuuttia keskimääräisellä nopeudella 40 km/h ja käveli vielä 85 sekuntia nopeudella 1,2 m/s. Kuinka pitkä matkan hän kulki?

*Ratkaisu*

Merkitään:

nopeus = $v$

matka = $s$

aika = $t$.

Tällöin $v = \frac{s}{t}$, josta $s = vt$. Koska kuljettu matka $s$ on kävelymatka + lentomatka + toinen kävelymatka + taksimatka + kolmas kävelymatka, saadaan:

$$s = 6\frac{km}{h} \cdot 1h12\,min + 950\frac{km}{h} \cdot 4{,}5h + 1{,}5\frac{m}{s} \cdot 15\,min + 40\frac{km}{h} \cdot 48\,min + 1{,}2\frac{m}{s} \cdot 85s$$

Tätä yksiköitten sekamelskaa on syytä yksinkertaistaa. Muuten laskeminen päättyy ennen kuin pääsi edes alkuun. Muutetaan yksiköt kilometreiksi ja kilometreiksi tunnissa. Tällöin laskun tulos saadaan kilometreissä, koska tunnit supistuvat pois kuten pitääkin.

$$\begin{aligned} s &= 6\frac{km}{h} \cdot 1{,}2h + 950\frac{km}{h} \cdot 4{,}5h + 5{,}4\frac{km}{h} \cdot 0{,}25h + 40\frac{km}{h} \cdot 0{,}8h + 4{,}32\frac{km}{h} \cdot \frac{85}{3600}h \\ &= 7{,}2km + 4275km + 1{,}35km + 32km + 0{,}102km \\ &= 4315{,}652km \end{aligned}$$

Tarkista nuo minun tekemäni laskut tekemällä ne itse yksityiskohtaisesti uudestaan!

Tällaisessa ”käytännöllisessä” tehtävässä nousee esiin myös kysymys järkevästä tarkkuudesta tulosta ilmoitettaessa. Mikään noista luvuista ei voi olla aivan tarkka. Tuloksemme järkevä tarkkuus jää kilometrin huonommalle puolelle varsinkin lento-osuuden takia, jos otamme ”elävän elämän” huomioon. Muista myös oikea pyöristäminen!

Toisaalta – ottaaksemme jälleen ”elävän elämän” huomioon – väsynyt matkustaja on varmaan sitä mieltä, että on sillä väliä, osuuko hän sänkyynsä vai niinkin lähelle kuin metrin päähän siitä.

Vastaus: Matti kulki noin 4308 kilometriä.

Tavallisesti vastauksen tarkkuus riippuu epätarkimmasta lähtöarvosta eli siitä, missä on vähiten merkitseviä numeroita: ei ole mieltä ilmoittaa tulos tarkemmin kuin epätarkin lähtötieto. ”Ketju on yhtä vahva kuin sen heikoin lenkki”.

Otetaan toinen käytännön esimerkki.

**Esimerkki 11**

Kallion huipulla seisoo aivan pystysuorassa puinen pilari, joka yltää 14 metrin korkeuteen kallion huipusta. Pilarin päällä on lisäksi levy, jonka paksuus on 1,5 cm. Levyllä on puolestaan toukka. Nähdäkseen paremmin se kurottaa itsensä mahdollisimman pitkäksi, suoraan levystä ylöspäin. Näin toukka yltää 4 mm korkeudelle levyn pinnasta. Kuinka ylhäällä kallion huipusta toukan päälaki on?

*Ratkaisu*

Päälaki on korkeudella 14m + 1,5 cm + 4mm. Jokainen yhteenlaskettava on nyt lausuttava samoissa yksiköissä, jotta yhteenlasku voidaan suorittaa. Kirjoitetaan tuo summa uudestaan milleinä

$$14\text{m} + 1{,}5\text{ cm} + 4\text{mm} = 14000\text{ mm} + 15\text{ mm} + 4\text{ mm} = 14019\text{ mm}.$$

Sivuutetaan tarkkuuden tarkasteleminen. Tämän tehtävän tavoite oli muistuttaa siitä, että vain samoja yksiköitä voi laskea suoraan yhteen. Eri asia sitten on, voimmeko tietää puupilarin korkeutta niin tarkasti, että 4-millisen olion korkeus kannattaa ottaa huomioon.

Vastaus: Toukan päälaki ylsi 14019 millimetrin korkeuteen.

*Massan yksiköt* ovat sinulle ennestään tutut. Vain *atomimassayksikköä* et ehkä ole aiemmin tavannut. Teen luettelen tavallisista massan yksiköistä lähinnä ”täydellisyyden vuoksi”. Huomaa, että massanyksiköiden kanssa käytetään etuliitteitä paljon. Erityisesti siis kg = 1000 grammaa ja gramma = 1000 milligrammaa.

| Nimi | Lyhenne | Kuinka monta grammaa | Huomautus |
|---|---|---|---|
| atomimassayksikkö | amu | $1{,}6605655 \cdot 10^{-24}$ | amu $= \frac{1}{12}$ C-12 atomin massasta |
| milligramma | mg | $10^{-3}$ | |
| senttigramma | cg | $10^{-2}$ | |
| desigramma | dg | $10^{-1}$ | |
| gramma | g | 1 | |
| dekagramma | dag | 10 | |
| hehtogramma | hg | 100 | |
| kilogramma | kg | 1000 | |
| tonni | tn | $10^6$ | Tonnin symboli voisi hyvin olla Mg. |

Mikään ei estä sinua jälleen jatkamasta tätä listaa: mikrogramma ($\mu$g), nanogramma (ng) ja niin edelleen.

*Tiheyden yksikkö* on aina massan yksikkö jaettuna tilavuuden yksiköllä. Tiheydellä mitataan siis tietyn tilavuuden omaavan aineen massaa. Mitä tiheämpi aine, sitä enemmän kuutiosentti tätä ainetta painaa ja mitä harvempi aine, sitä vähemmän kuutiosentti sitä painaa. Eräänlainen vedenjakaja on – vesi. Veden tiheys on yksi gramma kuutiosenttiä kohti eli yksi kilo litraa kohti.

Katso MAOLin tauluista esimerkkejä aineitten tiheyksistä.

Tiheyksiä tarkastellessasi tarvitset toisinaan tiedon, että esine, jonka aineen tiheys on alle yksi gramma kuutiosenttiä kohti, kelluu vedessä ja esine, jonka tiheys on enemmän kuin yksi gramma kuutiosenttiä kohti, uppoaa veteen. Fysiikan kursseilla tätä asiaa tutkitaan tarkemmin.

Muodollisesti esineen tiheys voidaan määritellä niin, että ensin mitataan esineen tilavuus ja massa. Jos massaa merkitään kirjaimella *m* ja sen tilavuutta kirjaimella *V*, niin sen tiheys on (merkitään kirjaimella $\rho$ eli ”roo”):

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Täten ihmisenkin tiheys riippuu myös siitä, onko hänen keuhkoissaan ilmaa vai ei, mutta hänen lihastensa tiheys ei riipu keuhkojen ilmasisällöstä. Kaiken kaikkiaan ihmisen tiheys on suurin piirtein veden tiheys. Kokeile asiaa kellumalla vedessä keuhkot täynnä ja keuhkot tyhjinä.

**Esimerkki 12**

Katsotaan MAOLin tauluista raudan tiheys ja lasketaan sellaisen rautakuulan paino, jonka läpimitta on 15 senttiä.

*Ratkaisu*

MAOLin tauluista näet, että raudan tiheys on $7{,}87 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ eli lähes kahdeksan kertaa veden tiheys. Täten rautakuula ei kellu vedessä!

Jos *r* on pallon säde eli halkaisijan puolikas, pallon tilavuus *V* saadaan kaavasta $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Koska tiheys siis määritellään kaavalla

$$\rho = \frac{m}{V},$$

saadaan massan kaava ratkaisemalla tästä *m*:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \; .$$

Sijoittamalla lukuarvot saadaan rautakuulan massalle kaava:

$$m = 7{,}87 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{15}{2} cm\right)^3$$

Koska tuossa on nyt sekä kuutiometrejä että kuutiosenttejä, on tehtävä yksikönmuunnos. Muutetaan kuutiometrit kuutiosenteiksi. Koska 1 metri = 100 senttiä, saadaan

$$m^3 = (100cm)^3 = 1000000cm^3 = 10^6 cm^3.$$

Siis

$$\begin{aligned} m &= 7{,}87 \cdot 10^3 \frac{kg}{10^6 cm^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{15}{2} cm\right)^3 \\ &\approx 14kg \end{aligned}$$

Pallon halkaisija annettiin vain kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, joten siihen on tyydyttävä myös vastauksessa.

<u>Vastaus</u>: Rautapallon massa on noin 14 kiloa.

Rautapallo ei siis kellu? Tämä koskee umpirautaista palloa.

**Esimerkki 13**

Onton rautapallon seinämän paksuus on 4,000 mm. Pallon läpimitta on 15,00 cm. Kelluuko pallo? Pallon sisälle jäävän ilman massaa ei huomioida.

*Arkhimedeen lain* mukaan väliaineeseen, kuten veteen, upotettu esine menettää painostaan saman määrän kuin mitä sen syrjäyttämä väliaineen määrä paina. Sovellamme tätä nyt.

Pallon kuori on kahden samankeskisen pallon väliin jäävä tila. Toisen pallon halkaisija on 15,00 cm ja toisen pallon halkaisija $15{,}00cm - 2 \cdot 4{,}000mm$. Kuorihan on pallon molemmilla puolilla: siksi $2 \cdot 4{,}000mm$. Lasketaan näitten pallojen väliin jäävän raudan massa, jaetaan tilavuudella ja verrataan saatua tiheyttä veden tiheyteen.

Esimerkistä 10 tai uudelleen MAOLin tauluista saamme raudan tiheyden, joka on $7{,}87 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} = 7{,}87 \frac{g}{cm^3}$. On syytä muuntaa tiheys heti yksiköksi $\frac{g}{cm^3}$. Jos käytät lausekkeissa toisiaan vastaavia yksiköitä, tiedät, minkä yksikön saat laskujen tuloksena.

Pallon tiheys on pallon massa (ilman massa pois lukien) jaettuna pallon tilavuudella. Lasketaan

$$\frac{7{,}87 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (15 - 0{,}8)^3\right)}{\frac{4}{3}\pi \cdot 15^3} \approx 1{,}19.$$

Yksikkönä tässä on $\frac{g}{cm^3}$. Täten tuloksemme mukaan tämän pallon tiheys on isompi kuin veden tiheys, joten pallo uppoaa.

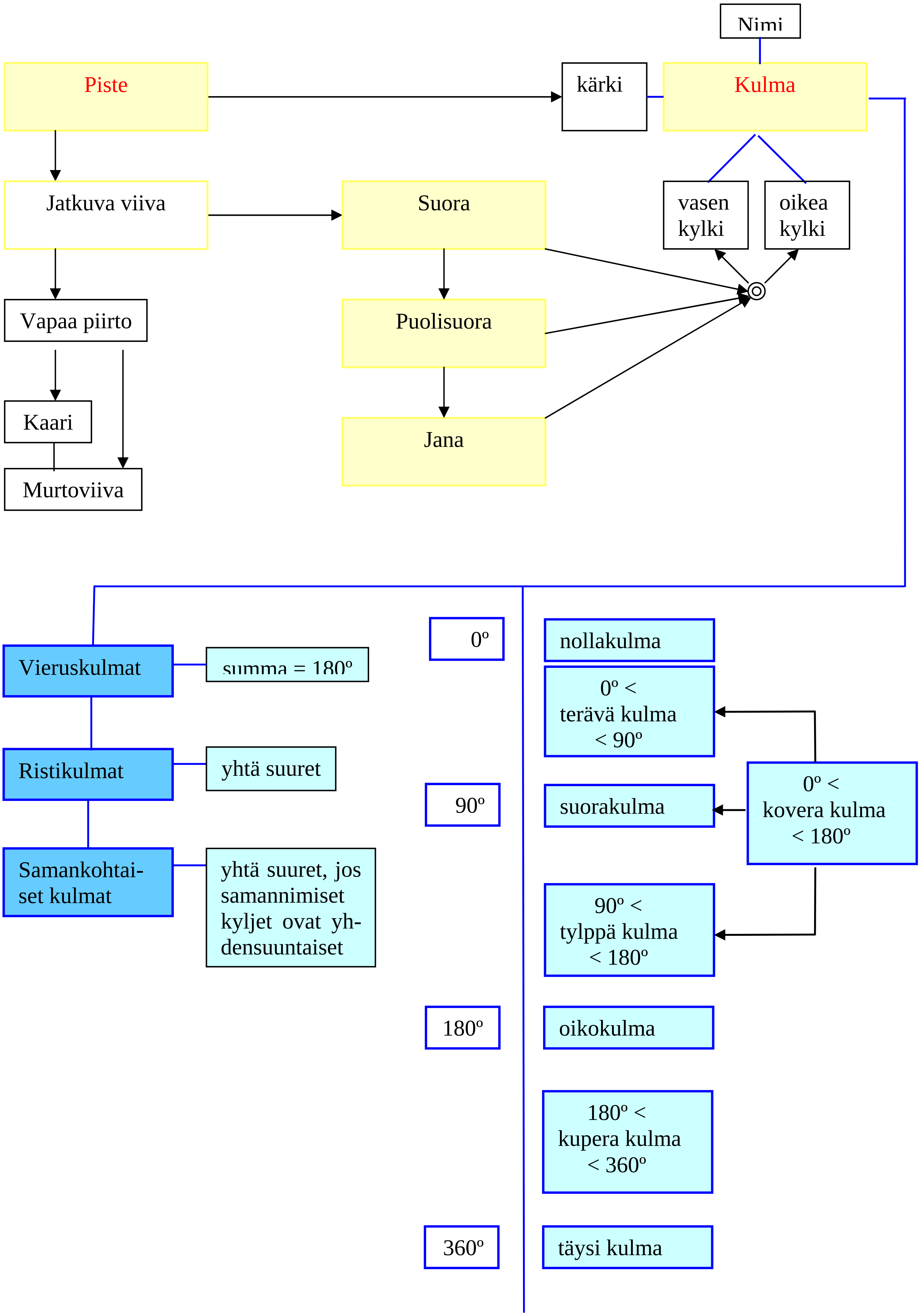
Vastaus: Pallo ei kellu.

Lopetan tämän aihion etuliitteiden taulukolla, sekä keskeisten käsitteitten tiiviillä kertauksella. Kirjoitan ne suuremmasta pienempään. Tämmöinen taulukko on myös MAOLin tauluissa, mutta olkoon tässäkin.

| Nimi | Symboli | Merkitys |
|---|---|---|
| jotta | Y | $10^{24}$ |
| tsettta | Z | $10^{21}$ |
| eksa | E | $10^{18}$ |
| peta | P | $10^{15}$ |
| tera | T | $10^{12}$ |
| giga | G | $10^{9}$ |
| mega | M | $10^{6}$ |
| kilo | k | $10^{3}$ |
| hehto | h | $10^{2}$ |
| deka | da | $10^{1}$ |
| desi | d | $10^{-1}$ |
| sentti | c | $10^{-2}$ |
| milli | m | $10^{-3}$ |
| mikro | μ | $10^{-6}$ |
| nano | n | $10^{-9}$ |
| piko | p | $10^{-12}$ |
| femto | f | $10^{-15}$ |
| atto | a | $10^{-18}$ |
| tsepto | z | $10^{-21}$ |
| joko | y | $10^{-24}$ |

Käytä vain yhtä taulukon etuliitettä kerrallaan. Älä koskaan kirjoita mitään sellaista kuin Mmg eli megamilligramma.

*Keskeisiä käsitteitä*



**Kirjallisuusviitteet**


[1] Tieteiden Kuningatar. Matematiikan historia osa I - II. *Carl Boyer*, Art House 1994, suomentanut Kimmo Pietiläinen).

[2] The Road To Reality. A Complete Guide To The Laws Of The Universe. *Roger Penrose*. Vintage Books, London 2005.

[3] MAOLin taulukot. Matematiikka, fysiikka, kemia. *Raimo Seppänen, Martti Kervinen, Irma Parkkila, Lea Karkela, Pekka Meriläinen*. Otava, Keuruu 2006.