Aluksi

Tässä luvussa käsitellään paljon monikulmioita sekä muutamia tärkeimpiä esimerkkejä monikulmioihin liittyvistä laeista. Näistä laeista ehdottomasti tärkein tai ainakin kauaskantoisin on *Pythagoraan lause*. Älä unohda Pythagoraan lausetta koskaan. Se on yksi meidän todellisuuskäsityksemme kulmakiviä.

Pythagoraan lauseen lisäksi esillä on myös *trigonometria*, joka nojaa vahvasti Pythagoraan lauseeseen. Nimestään huolimatta – kieltentuntija oikaisee varmaan: ”Ei, vaan juuri siksi!” – trigonometria on kuitenkin yksinkertaisesti vain kolmion mittaamista. Se tarjoaa välineet kolmion ominaisuuksien ratkaisemiseksi.

Pythagoraan lause ja trigonometria ovat tämän luvun pääsisältö.

Monikulmioista esillä ovat tärkeimmät eli kolmio, nelikulmio ja säännölliset monikulmiot. Älä sivuuta näitäkään, vaikka sanoin edellä jotain muuta luvun pääsisällöksi. Matematiikan kursseissa ei ole mitään turhaa.

Päätän tämän luvun graafiseen tiivistelmään.

Monikulmioita

Monikulmio on suljettu, yhtenäinen tasokuvio, jonka muodostavat pisteet ja näitä yhdistävät janat

Näissä pisteissä, joita sanotan monikulmion *kärjiksi*, janat muodostavat kulmia. Jokainen monikulmion kärki on aina jonkin janan alku- ja jonkin toisen janan loppupiste.

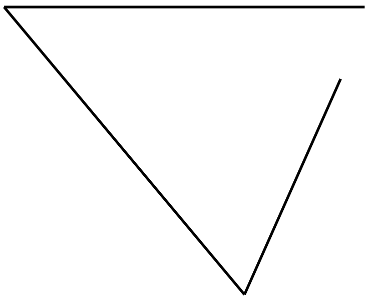
Koska monikulmio siis koostuu pisteistä ja janoista, siinä ei esimerkiksi ole kaaria.

Monikulmiota rajoittaa janoista koostuva, suljettu viiva. Tätä suljettua viivaa kutsutaan monikulmion *piiriksi*.

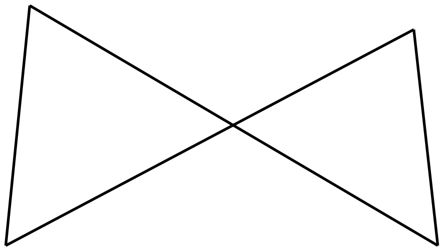
Janaa, joka yhdistää monikulmion kaksi kärkeä, jotka eivät ole vierekkäiset tai samat, sanotaan monikulmion *lävistäjäksi*.

Monikulmiolla voi olla useitakin lävistäjiä. Toisaalta *kolmiolla* ei ole yhtään lävistäjää. Vaatimus, jonka mukaan lävistäjän päätepisteet eivät ole vierekkäiset kärjet, merkitsee vain sitä, että monikulmion sivu ei ole sen lävistäjä.

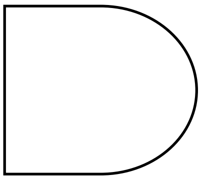
Kolmio ja neliö ovat monikulmioita, mutta ympyrä ei ole monikulmio. Seuraavassa piirroksessa on kolme kuviota, jotka eivät ole monikulmioita.



Tämä ei ole suljettu



Tämä ei ole yhtenäinen

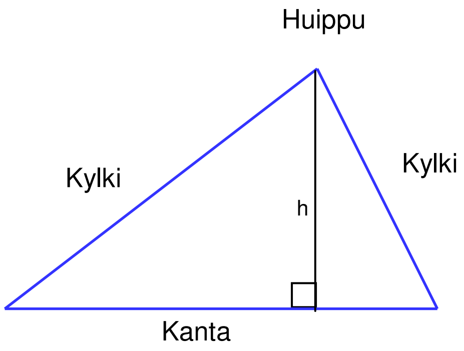


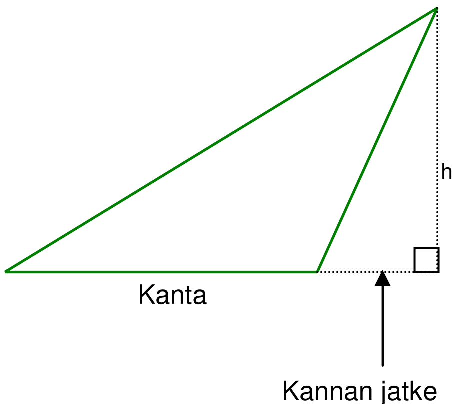
Tämän osana on kaari

Kolmio

Kolmio on yksinkertaisin monikulmio: sillä on kärkiä pienin mahdollinen määrä eikä yhtään lävistäjää.

Nimetään kolmion osia seuraavan piirroksen avulla.





Minkä tahansa kolmion sivun voi valita *kannaksi*, jolloin muut sivut ovat *kylkiä*. Kun kanta on valittu, kolmion korkeusjana – kuvassa jana h – piirretään kohtisuoraan kantaa tai sen jatketta vastaan.

Kantaa ei siis saa vaihtaa kesken laskujen – tai jos vaihtaa, niin myös merkinnät on korjattava vastaavasti.

Kolmion korkeusjana piirretään kantaa vastaan ja myös mielletään suhteessa kantaan

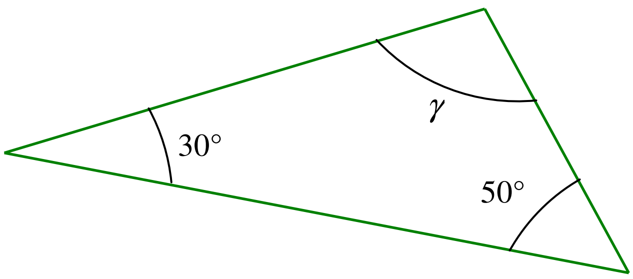
Huomaa, että kolmion korkeusjana saattaa joutua kolmion ulkopuolelle kuten yllä oikeanpuoleisen kolmion tapauksessa kävi.

Seuraavan väitteen perustelu on arvioitavana tehtävänä.

Kolmion kulmien summa on 180°

Esimerkki 1

Kuva määrittelee tilanteen. Laske kulman γ asteluku.



Ratkaisu

Koska 30° + 50° + γ = 180°, niin

γ = 180° – 30° – 50° = 100°.

<u>Vastaus</u>: Kulman γ asteluku on 100°.

Esimerkki 2

Kolmion kulmat suhtautuvat kuten luvut 1, 2 ja 3. Laske kolmion kulmien suuruudet.

Ratkaisu

Koska kulmien suhde on 1 : 2 : 3, niin saadaan yhtälö $x + 2x + 3x = 180$, josta $x = 30$. Kulmat ovat siis 30°, 60° ja 90°.

<u>Vastaus</u>: Kulmat ovat 30°, 60° ja 90°.

Koska kolmio on yksi tärkeimpiä, Pythagoraan lauseen takia ehkä jopa tärkein monikulmio, niin on olemassa tarve luokitella kolmioita. Tavallisin luokitteluperuste on katsoa, millaisia kulmia kolmiossa on tai millaisia sen sivut ovat toistensa suhteen. Seuraavassa on tällainen luokittelu.

Teräväkulmainen kolmio

Teräväkulmaisen kolmion jokaisen kulman asteluku on alle 90°.

Suorakulmainen kolmio

Suorakulmaisen kolmion yksi kulma on 90 asteen suuruinen. Sen suoran kulman vastainen sivu eli sen pisin sivu on nimeltään *hypotenuusa* ja muut sivut ovat *kateetteja*.

Suorakulmaisen kolmion korkeusjanaksi kannattaa yleensä valita toinen sen kateeteista.

Kannattaa **huomata**, että hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion pisin sivu.

Hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion pisin sivu

Tylppäkulmainen kolmio

Tylppäkulmaisessa kolmiossa on yksi kulma, jonka asteluku on yli 90°.

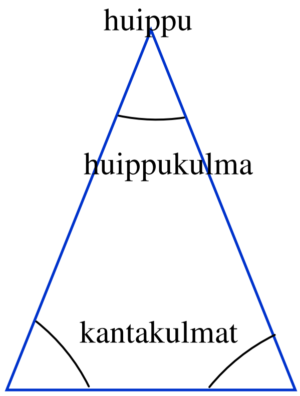
Huomaa, että tällaisen kolmion korkeusjana saattaa olla kolmion ulkopuolella.

Tasakylkinen kolmio

Tasakylkisellä kolmiolla on vähintään kaksi yhtä pitkää sivua. Yleensä tasakylkisen kolmion kannaksi valitaan eripituinen sivu ja kyljiksi yhtä pitkät sivut. Tällöin kulmat, jotka kyljet muodostavat kannan kanssa eli *kantakulmat*, ovat yhtä suuret. Tasakylkisen kolmion kyljet muodostavat *huippukulman*.

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret

Eräs tasakylkinen kolmio:



Jos tasakylkisen kolmion kannaksi on valittu eripituinen sivu, sen huipusta piirretty korkeusjana jakaa sekä huippukulman että kannan kahteen yhtä suureen osaan. Lue **Esimerkki 4**.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa sekä huippukulman että kannan kahteen yhtä suureen osaan.

Tasasivuinen kolmio

Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

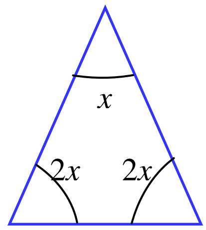
Koska tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Myös sen kulmat ovat yhtä suuret eli sen kaikki kulmat ovat 60 asteen suuruiset.

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60 asteen suuruiset.

Huomaa, että tasasivuinen kolmio on myös tasakylkinen kolmio, mutta että tasakylkinen kolmio ei välttämättä ole tasasivuinen kolmio.

Esimerkki 3

Tasakylkisen kolmion kantakulma on kaksi kertaa huippukulman suuruinen. Laske kulmien asteluvut.



Ratkaisu

Koska kolmio on tasakylkinen, niin sen kantakulmat ovat samat. Lisäksi kolmion kulmien summa on 180 astetta. Näin kuvan merkinnöin saadaan yhtälö

$$x + 2x + 2x = 180°$$

ja siitä edelleen, että x = 36º. Kolmion huippukulma on siis 36º suuruinen ja sen kantakulmat 72º suuruiset. Tarkistus: 36º + 72º + 72º =180º kuten pitääkin.

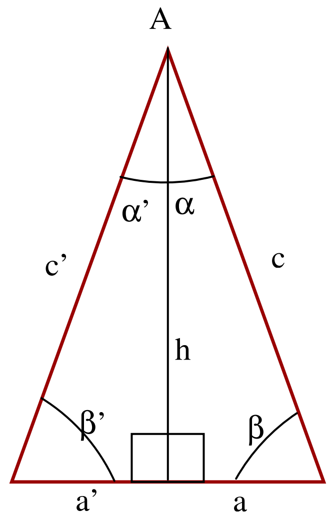
Esimerkki 4

Perustellaan esimerkkinä edellä oleva väite, jonka mukaan ”jos tasakylkisen kolmion kannaksi on valittu eripituinen sivu, sen huipusta piirretty korkeusjana jakaa sekä huippukulman että kannan kahteen yhtä suureen osaan”. Tämmöisiä todistustehtäviä ei ole monta lyhyen matematiikan kursseilla, mutta ei viitsitä niitä ihan kokonaan hylätäkään.

Ratkaisu

Piirretään jokin tasakylkinen kolmio.

Huomaa, että käytännössä piirrämme ”juuri täsmälleen” sen kolmion, jonka piirrämme. Ajatus kuitenkin on, että ajattelemme piirrostamme kaikkien tasakylkisten kolmioitten edustajana, jota ei rajoiteta millään muulla tavalla kuin sillä, että se on tasakylkinen kolmio. Sillä ei esimerkiksi ole jotain tiettyä kantakulmaa.



Käytän taas kuvaa merkintöjen määrittelemiseen. Tämä ei merkitse lisärajoitusta kolmiolle. Annan vain nimiä, jotta sinä tiedät, mistä minä milloinkin puhun.

Koska kolmiomme on tasakylkinen, tiedämme siitä seuraavat asiat:

1. sivut c ja c’ ovat yhtä pitkät eli c = c’
2. kantakulmat ovat samat eli $\beta = \beta'$
3. korkeusjana h muodostaa suoran kulman kannan kanssa (merkitty kuvaan suorakulmioilla)

Koska kaikkien kolmioiden kulmien summa on 180º, niin

$$\alpha + \beta + 90° = 180°,$$

josta $\alpha + \beta = 90°$ eli $\alpha = 90° - \beta$.

Vastaavasti saadaan, että $\alpha' = 90° - \beta'$.

Koska β = β', niin $90° - \beta' = 90° - \beta$. Koska $\alpha = 90° - \beta$, niin $\alpha' = 90° - \beta' = 90° - \beta = \alpha$ eli $\alpha = \alpha$'. Huippukulma on siis jaettu kahteen yhtä suureen osaan.

Janojen a ja a' yhtäsuuruus seuraa yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella (yhtenäiskoulu): Kuvan suorakulmaisten kolmioitten kaikki kulmat samat. Myös niitten kaksi sivua ovat samat, sillä korkeusjana on yhteinen ja c = c'.

Nelikulmio

Nelikulmiolla on neljä sivua ja neljä kärkeä.

Yleisesti nelikulmion sivut ja kulmat voivat olla minkä kokoisia tahansa kunhan sivut ovat yhtä pitkät ja tuloksena on monikulmio, jolla on neljä kärkeä.

Jos nelikulmiolla on (ainakin) kaksi yhdensuuntaista sivua, sen korkeus voidaan määritellä. Tällöin *nelikulmion korkeus* on noitten kahden yhdensuuntaisen välinen kohtisuora etäisyys.

Nelikulmiolle voidaan piirtää kaksi lävistäjää. Lävistäjän avulla nelikulmio on mahdollista jakaa kahdeksi kolmioksi.

Vaikka en todista seuraavaa tulosta, se kannattaa silti muistaa.

Nelikulmion kulmien summa on 360º

Nelikulmioita luokitellaan samaan tapaan kuin kolmioita. Seuraavassa erilaisten nelikulmioitten luettelo.

Suorakulmio

Suorakulmion kaikki kulmat ovat suorat. Tästä seuraa, että sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.

Neliö

Neliön kaikki kulmat ovat 90º kulmia ja kaikki sivut yhtä pitkät.

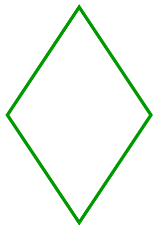
Huomaa, että neliö on myös suorakulmio.

Suunnikas

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Tästä seuraa, että suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja että sen vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Huomaa, että sekä neliö että suorakulmio ovat myös suunnikkaita.

Vinoneliö eli neljäkäs



Vinoneliön vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja sivut yhtä pitkät.

Huomaa, että neliö on myös neljäkäs ja että vinoneliö on myös suunnikas.

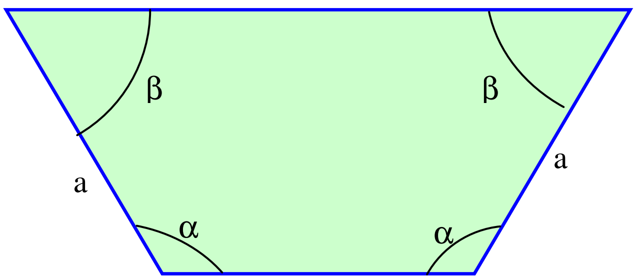
Puolisuunnikas

Puolisuunnikkaalla on kaksi yhdensuuntaista sivua. Sen kaikki sivut voivat olla eri pituiset ja kaikki kulmat eri suuret.

Tasakylkinen puolisuunnikas

Tasakylkinen puolisuunnikas on sellainen puolisuunnikas, jolla on kaksi yhtä pitkää sivua.

Tasakylkiselle puolisuunnikkaalle voidaan valita kanta, jolloin sillä on myös kantakulmat.

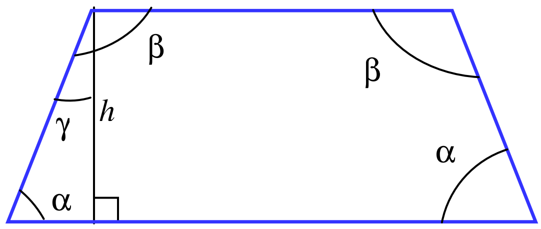


Esimerkki 5

Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat 30º pienemmät kuin kannan vastaiset kulmat. Piirretään kannan vastaisen sivun toisesta päätepisteestä eli toisesta kärjestä suunnikkaan korkeusjana. Laske näin syntyvän kolmion kulmien asteluvut. Katso kuvaa.

Ratkaisu

Merkitään korkeusjanaa kirjaimella h. Annetaan kulmille nimet kuvan avulla. Huomaa, että kuvassamme ei oikeastaan ole kahta kulmaa α, vaan kaksi kulmaa, joiden molempien asteluku on α. Vastaavasti kuvassa on kaksi β:n kokoista kulmaa.



Koska nelikulmion kulmien summa on $360°$, niin $2\alpha + 2\beta = 360°$. Koska $\beta = \alpha + 30°$, niin saadaan $\alpha + \alpha + 30° = 180°$ ja siis $\alpha = 75°$.

Koska tutkittava kolmio on suorakulmainen, niin $\alpha + \gamma + 90° = 180°$. Saadaan siis $\gamma = 15°$.

<u>Vastaus</u>: Kulmien asteluvut ovat $90°$, $75°$ ja $15°$.

Säännöllinen monikulmio

Tutuimmat säännölliset monikulmiot ovat neliö ja tasasivuinen kolmio. Näille, kuten muillekin säännöllisille monikulmioille on ominaista se, että on olemassa ympyrä, jonka kehällä monikulmion kärjet ovat. Kuinka suuri tämä ympyrä on, riippuu tietenkin monikulmion koosta. Aina sellainen on kuitenkin olemassa.

Tämä ehto ei riitä säännöllisen monikulmion määritelmäksi. Siksi määritellään seuraavalla tavalla.

Määritelmä

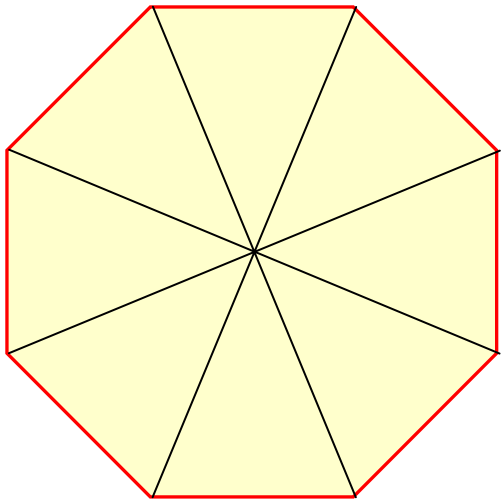
Säännöllinen monikulmio eli *säännöllinen n-kulmio* on sellainen monikulmio, jonka <u>kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat yhtä suuret</u>.

Tästä seuraa kappaleen alun toteamus säännöllisistä monikulmioista: <u>valitaan mikä säännöllinen monikulmio tahansa, niin aina on olemassa ympyrä, jonka kehällä monikulmion kärjet ovat</u>. Tämäkin tiedonjyvä kannattaa painaa mieleen.

Säännöllisen monikulmion kulmista

Tarkastellaan vielä säännöllisen monikulmion keskuskulmia ja sen kahden sivun välisiä kulmia. Piirretään säännöllinen 8-kulmio. Se edustakoon nyt kaikkia säännöllisiä monikulmioita.

Piirretään kahdeksankulmiollemme myös ne lävistäjät, jotka kulkevat kulmasta saman kulman kanssa vastakkaiseen kulmaan. Tällöin 8-kulmio tullaan jakaneeksi kahdeksaan tasakylkiseen kolmioon.



Jos haluaisin, voisin nyt piirtää ympyrän, jonka keskipiste on lävistäjien leikkauspisteessä ja jonka säde on kahden vastakkaisen kärjen kautta piirretyn lävistäjän puolikas. Ympyrän halkaisija olisi siis yhtä pitkä kuin kahdeksankulmiomme pisin lävistäjä. Kaikki kahdeksankulmiomme kärjet olisivat tasaisin välein tuolla ympyräviivalla.

Huomaa. Kahdeksankulmiolla on muitakin lävistäjiä kuin ne, jotka piirsin näkyviin ja kaikki nuo muut lävistäjät ovat lyhyempiä kuin kuvaan piirretyt.

Annetaan nyt nimi kahdelle säännöllisen monikulmion eri kulmalle. Äsken piirrettyjen tasakylkisten kolmioitten huippukulmia voi sanoa myös säännöllisen monikulmion *keskuskulmiksi*. Säännöllisen monikulmion kahden sivun välinen kulma on puolestaan yksinkertaisesti *säännöllisen monikulmion kulma*.

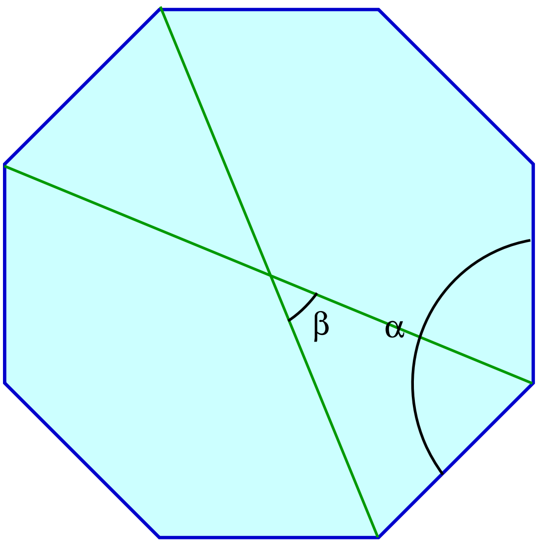
Kahdeksan tasakylkistä kolmiota, joista kuvio koostuu, ovat kirjaimellisesti tiiviisti kylki kyljessä. Tämän ja edellä olevan ympyrätarkastelun avulla on helppo nähdä, että näitten tasakylkisten kolmioitten huippukulmat ovat yhteensä 360º. Koska kuviomme kolmiot ovat identtiset, niin silloin $8\alpha = 360°$, josta edelleen $\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$.

Säännöllisen kahdeksankulmion osakolmiot ovat siis tasakylkisiä kolmioita, joitten huippukulman asteluku on 45º. Merkitään kolmion kantakulmaa kirjaimella β. Silloin $2\beta + 45° = 180°$, josta $\beta = 67{,}5°$.

Säännöllinen 8-kulmion tapauksessa keskuskulman suuruus saatiin jakamalla 360º kahdeksalla eli kärkien lukumäärällä. Tämä voidaan yleistää.

Säännöllisen n -kulmion keskuskulman suuruus on $\frac{360°}{n}$

Piirretään nyt uusi säännöllinen kahdeksankulmio, joka jälleen edustaa kaikkia muita säännöllisiä monikulmioita. Merkitään sitten monikulmion kulmaa α:lla ja merkitään se kuvioon. Piirretään kuvaan myös kaksi lävistäjää, jotka kulkevat kulmasta sen vastakkaiseen kulmaan kuten edellisessä kuvassa. Lävistäjä puolittaa kulman α. Merkitään tasakylkisen kolmion huippukulmaa kirjaimella β.



Koska kolmiot ovat tasakylkiset, niin

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}+\beta=180°,$$

joten

$$\alpha=180°-\beta.$$

Koska $\beta=\frac{360°}{n}$, missä n on monikulmion kulmien lukumäärä,

niin

$$\begin{aligned}\alpha&=180°-\beta\\&=180°-\frac{360°}{n}\\&=180°\left(1-\frac{2}{n}\right)\\&=\frac{(n-2)}{n}\cdot 180°\end{aligned}$$

eli

säännöllisen monikulmion kulman asteluku on

$$\boxed{\alpha=\frac{(n-2)}{n}\cdot 180°},$$

mikäli sitä merkitään edelleen kirjaimella α.

Tämän voi ilmaista toisinkin:

$$\boxed{\text{Säännöllisen n-kulmion kulmien summa on } (n-2)\cdot 180°}$$

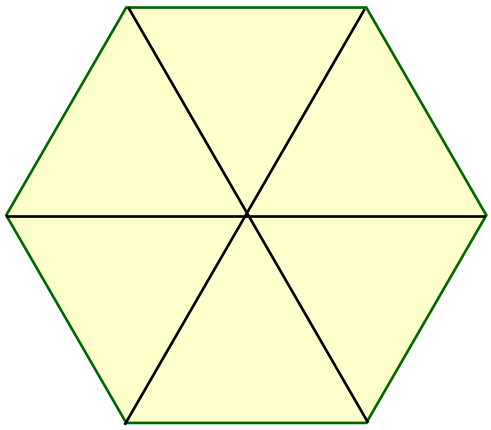
Tässä muodossa se saattaa olla helpompi muistaa.

Esimerkki 6

Säännöllinen kuusikulmio on erityisen helppo piirtää. Voidaan ajatella, että säännöllinen kuusikulmio muodostuu kuudesta, rinnakkain (”kylki kylkeen”) asetetusta tasakylkisestä kolmiosta. Koska näitten kunkin kolmion huippukulma eli säännöllisen kuusikulmiomme keskuskulma on $\frac{360°}{6} = 60°$ ja kyseessä on tasakylkinen kolmio, on myös kukin monikulmion kulma 60 astetta. Kyseessä onkin tällä kertaa siis tasasivuinen kolmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät eli monikulmion yhden sivun mittaiset.

Koska säännöllisen monikulmion lävistäjän pituus on yhtä suuri kuin sellaisen ympyrän halkaisija, jolla monikulmion pisteet ovat, on tämän ympyrän säde saman pituinen kuin kuusikulmion sivu. Säännöllinen kuusikulmio voidaan siis piirtää pelkän harpin avulla seuraavasti:

- Valitse harpin kärkiväliksi kuusikulmion sivun pituus
- Piirrä ympyrä tällä kärkivälillä
- Merkitse ympyrän kehälle yksi piste
- Aseta harpin kärki tähän pisteeseen
- Piirrä harpin avulla kärkiväli säilyttäen uusi piste ympyrän kehälle
- Aseta harpin kärki uuteen pisteeseen
- Piirrä taas uusi piste
- Toista tämä kunnes 6-kulmio on valmis



Huomaa vielä sekin, *kuusikulmio* ja *kuutio* ovat kaksi aivan eri oliota! Koska niitten kuulostavat niinkin paljon toisiltaan, ne on epähuomiossa harmittavan helppo sekoittaa!

Pythagoraan lause

Vahinko, että julkisuudessa eniten siteerattu yhtälö lienee *Einsteinin* $E = mc^2$ eikä *Pythagoraan*

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Vahinko siksi, että Pythagoraan lauseella on käyttöä paljon arkisemmissa tilanteissa ja siksi myös paljon useammin kuin Einsteinin sinänsä aivan perustavanlaatuisella keksinnöllä.

Alkuperäisessä muodossaan Pythagoraan lause koskee suorakulmaisia kolmioita. Tarinan mukaan Pythagoras uhrasi sata härkää todistettuaan lauseensa. Koska ei kuitenkaan ole varmaa, onko Pythagoraan lause aidosti Pythagoraan itsensä keksimä vai onko sen keksinyt joku muu hänen yhteisönsä jäsen, niin ei myöskään kannattane uskoa juttuun sadasta härästä.

Pythagoraan lause voidaan esittää sanomalla, että

suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö on yhtä suuri kuin kateettien neliöitten summa

tai sanomalla, että

suorakulmaisen kolmion hypotenuusa sivuna piirretyn neliön ala on yhtä suuri kuin kateetit sivuina piirrettyjen neliöitten alojen summa

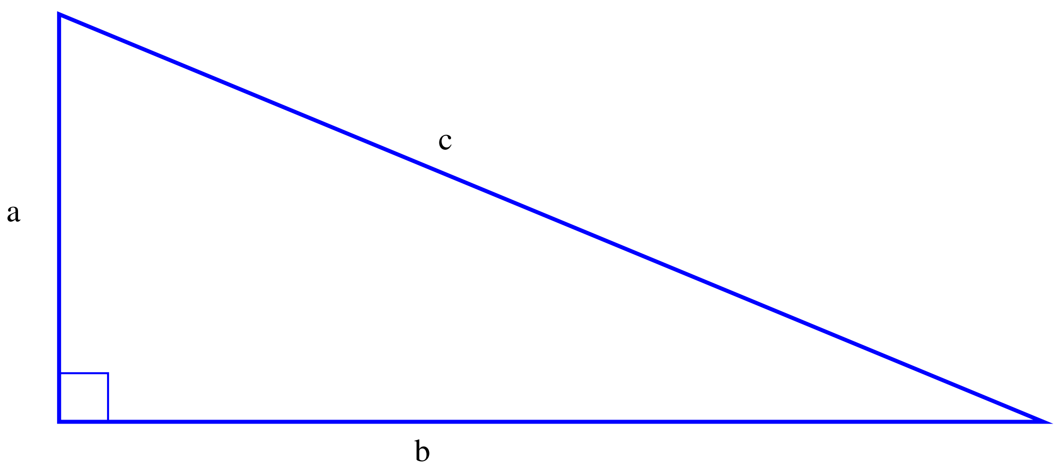
Esitetään Pythagoraan lause kuitenkin yhtälön avulla. Tässä vaiheessa olet jo ehkä sitä mieltä, että yhtälöitten käyttäminen on kätevää.

Olkoon meillä suorakulmainen kolmio. Merkitään sen hypotenuusaa c:llä ja kateetteja a:lla ja b:llä.

Silloin

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Eli, **jos** kolmio on suorakulmainen, **niin** $a^2 + b^2 = c^2$. Tämä on <u>Pythagoraan lause</u>.



Huomaa, että Pythagoraan lause kuuluu, että **jos** kolmio on suorakulmainen, **niin** … Se toimii kuitenkin toisinpäinkin. Myös tämä tulos on siis voimassa:

Jos kolmion sivut a, b ja c toteuttavat yhtälön $c^2 = a^2 + b^2$, niin kolmio on suorakulmainen

Jos siis tiedämme, että kolmio on suorakulmainen, niin voimme käyttää tätä yhtälöä. Jos taas huomaamme, että tämä yhtälö on voimassa, niin voimme päätellä, että kolmio on suorakulmainen.

Esimerkki 7

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 4 metriä ja 6 metriä. Laske hypotenuusan pituus.

Ratkaisu

Pythagoraan lauseen nojalla kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö. Otetaan siis neliöjuuri kateettien neliöiden summasta, niin saadaan hypotenuusan pituus.

Kateetin neliö = $(4m)^2 = 16m^2$

Toisen kateetin neliö = $(6m)^2 = 36m^2$

Näitten summa on $52m^2$.

Otetaan neliöjuuri: $\sqrt{52m^2} \approx 7{,}2m$.

<u>Vastaus</u>: Hypotenuusan pituus on noin 7 metriä.

Esimerkki 8

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 7 metriä pitkä ja hypotenuusa on 11 metriä pitkä. Laske toisen kateetin pituus.

Ratkaisu

Merkitään hypotenuusaa kirjaimella *c* ja annettua kateettia kirjaimella *a*. Nyt meidän tehtävämme on ratkaista *b* Pythagoraan lauseen yhtälöstä:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{11^2 - 7^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$$

<u>Vastaus</u>: Toisen kateetin pituus on noin 8,5 metriä.

Esimerkki 9

Kolmion sivujen pituudet ovat 3 metriä, 4 metriä ja 5 metriä. Onko kolmio suorakulmainen?

Ratkaisu

Koska $5^2 = 3^2 + 4^2$, niin kolmio on tosiaan suorakulmainen.

Huomaa, että näitten helppojen lukujen avulla voit tehdä helposti suoran kulman vaikka pahvista.

Esimerkki 10

Kolmion sivujen pituudet ovat 6 metriä, 8 metriä ja 11 metriä. Onko kolmio suorakulmainen?

Ratkaisu

Jos kolmio on suorakulmainen, sen pisin sivu on hypotenuusa. Lasketaan ensin mahdollisen hypotenuusan neliö ja sitten kateettien neliöt.

$$11^2 = 121$$

$$8^2 = 64$$

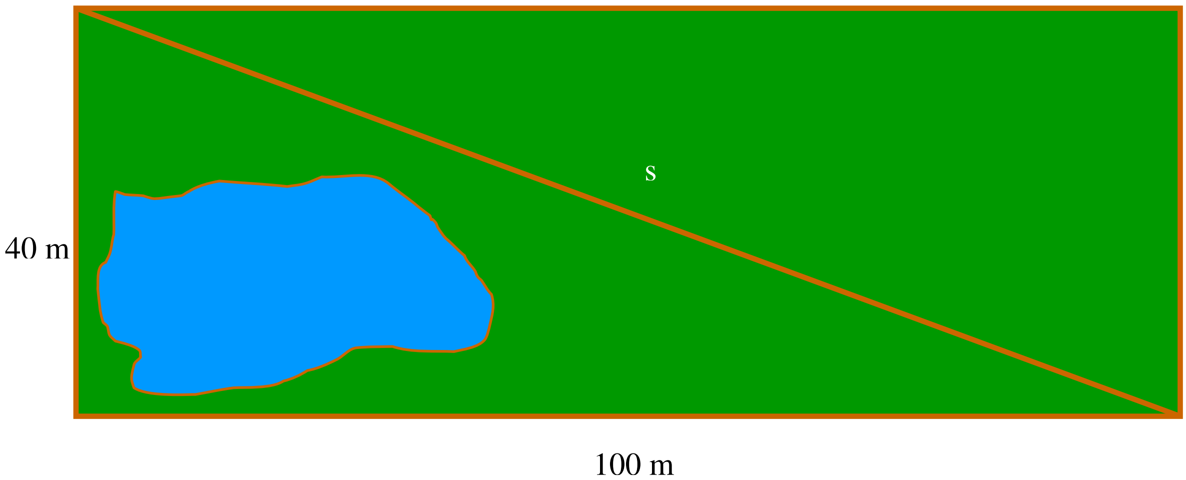
$$6^2 = 36$$

Kun kateettien neliöt lasketaan yhteen, saadaan 100. Koska hypotenuusakokelaan neliö on 121, ei hypotenuusan neliö ole kateettien neliöitten summa. Vedämme tästä johtopäätöksen, että kolmio ei ole suorakulmainen.

Vastaus: Kolmio ei ole suorakulmainen.

Esimerkki 11

Suorakulmion muotoinen puisto on 100 metriä pitkä ja 40 metriä leveä. Kuinka paljon oikaisee henkilö, joka kulkee puiston lävistäjää pitkin sen sijaan, että kiertäisi pitkin reunoja?



Ratkaisu

Reunoja pitkin matkaa kertyy 140 metriä. Suorakulmion lävistäjä on yhtä pitkä kuin sellaisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, jonka kateetit ovat 100 metrin ja 40 metrin pituiset. Lasketaan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$s = \sqrt{100^2 + 40^2} = 107,7$$

Lävistäjä on siis noin 108 metriä pitkä ja ero kiertotiehen on 140 metriä – 108 metriä = 32 metriä.

Vastaus: Hän oikaisee noin 32 metriä.

Trigonometriaa

Trigonometria on kirjaimellisesti kolmionmittausta. Otamme käyttöön trigonometriset funktiot *sini, kosini* ja *tangentti* ja alamme siis mittailla kolmioita.

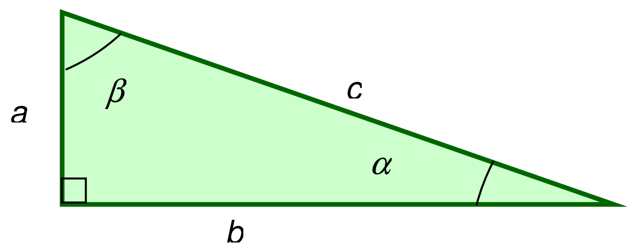
Muista, että kukin trigonometrinen funktio määritellään kahden sivun pituuden osamääränä. Niissä ei siis ole minkäänlaista mystiikkaa: ne ovat aina kahden sivun osamäärä. Koska sivun pituuden yksikkö on pituusyksikkö, vaikkapa metri, yksikkö supistuu jaettaessa pois. Jokainen trigonometrisen funktion arvo on paljas luku eli luku, jolla ei ole yksikköä.

Trigonometristen funktioitten vahvuus on siinä, että ne löytyvät kaikista funktio- ja graafisista laskimista.

Tutki seuraavan esityksen varsinaisten määritelmien lisäksi esimerkit tarkkaan.

Tarkennetaan käytettävää terminologiaa ensin ja katsotaan sitten yhtä esimerkkiä.

Kuvan kolmio on suorakulmainen ja suorakulma on merkitty kuvioon.

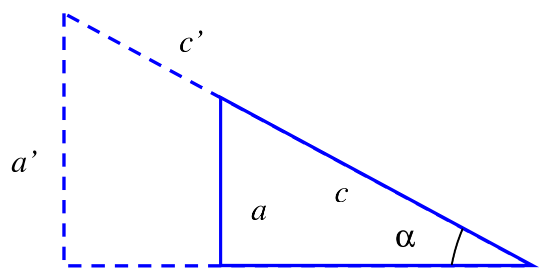


Kateettia a sanotaan kulman α *vastaiseksi kateetiksi* ja kateettia b sanotaan kulman α *viereiseksi kateetiksi*. Kateettia a voidaan yhtä hyvin sanoa myös kulman β *viereiseksi kateetiksi* ja kateettia b kulman β *vastaiseksi kateetiksi*.

Tutki

Ennen kuin jatkat teorian lukemista, tee seuraava *tutkimus*. Piirrä ruutupaperille suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on vaakasuorassa eli on kolmion kanta. Mittaa sekä pystysuoran kateetin että hypotenuusan pituus. Laske niitten suhde.

Muuta sitten vaakasuoran kateetin pituutta siirtämällä pystysuoraa kateettia. Merkitse muistiin määrä, jolla pidensit tai lyhensit kateettia. Mittaa uuden hypotenuusan pituus. Mittaa uudestaan sekä pystysuoran kateetin että hypotenuusan pituus. Laske uudestaan myös niitten suhde.



Odotettavissa on tulos, jonka mukaan $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$ riippumatta kolmiosi koosta. Tärkeää on, että kulma α säilyy samana koko ajan ja että suorakulma säilyy samana. Koska tämä suhde ei nähtävästi riipu kolmiosta vaan ainoastaan kulmasta, trigonometristen funktioitten arvoja voidaan luetteloida tai laittaa laskimeen.

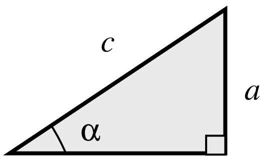
Laskin tosin laskee ne, se ei sisällä trigonometristen funktioitten taulukoita.

Kaikki trigonometriset funktiot ovat kolmion janojen suhteita.

Sini – funktio

Kulman *sinillä* tarkoitetaan yksinkertaisesti vain kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan suhdetta eli osamäärää. Se on siis vain kahden jananpituuden suhde. Kuvan merkinnöin

$$\boxed{sin\,\alpha=\frac{a}{c}}$$



<u>Määritelmä</u>:

Suorakulmaisen kolmion suoraa kulmaa pienemmän kulman

sini on kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan osamäärä.

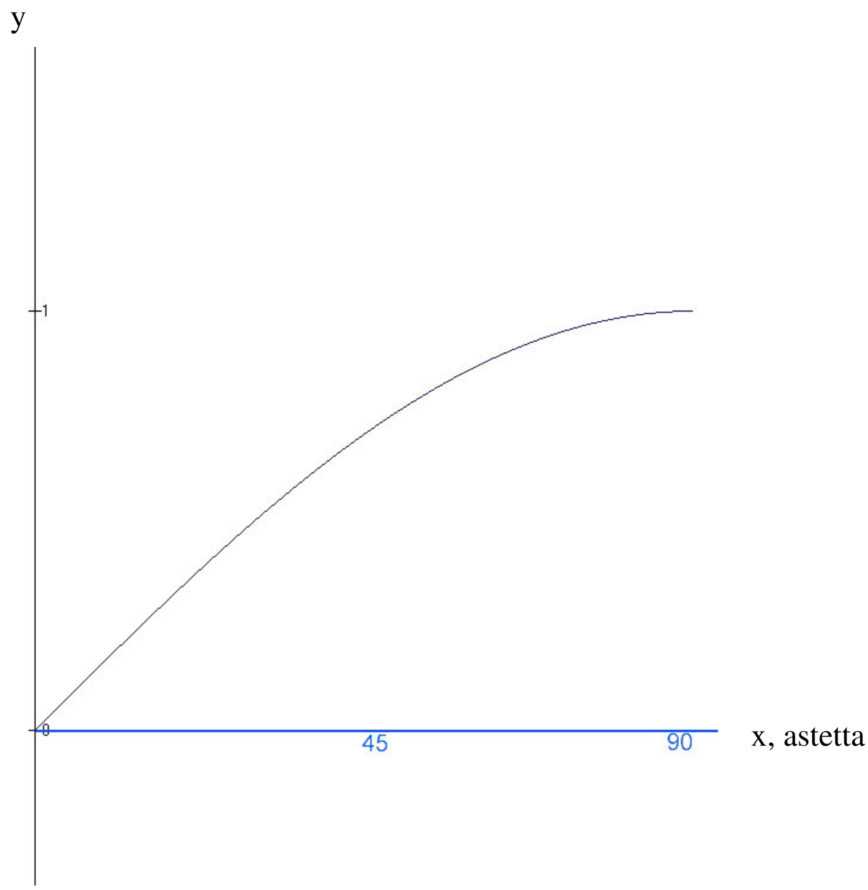
Kulman α sini kirjoitetaan $sin\,\alpha$. **Esimerkiksi** *sin* 30º = 0,5.

Muista, että jos kulma α on nollan ja 90 asteen välissä, niin

$0 < sin\,\alpha < 1$ ja sini on <u>kasvava</u> funktio

Kuvasta näet sini – funktion muodon, kun kulma muuttuu nollasta 90:ään asteeseen. Jos sinulla on graafinen laskin, voit laittaa sen piirtämään tämän saman kuvion, sini – funktion kuvaajan eli niin sanotun *sinikäyrän*.

Jos piirrät sinikäyrän laskimella, anna sille myös edellä kerrotun vastaiset rajat ja katso, mitä kone piirtää. En usko, että järkytyt.



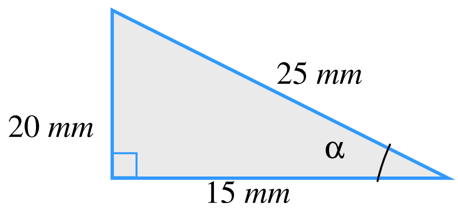
Esimerkki 12

Laske kuvan kolmion α -kulman sini. Kuinka suuri kulma on?

Ratkaisu

Määritelmänsä mukaan kulman sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusan. Saadaan siis:

$$sin\,\alpha = \frac{20mm}{25mm} = 0{,}8 .$$



Kerroin laskimen käytöstä kurssin MAB1 kolmannessa osassa. Kertaa se sekä lue laskimesi käsikirja, jos seuraavat asiat tuntuvat vierailta.

Tarkista, että laskimesi on tilassa, jossa se tulkitsee kulmat asteina eli että se on tilassa, jonka koneesi ilmaisee tekstillä DEG. Jos et tiedä, miten asia testataan, kokeile sitä laskemalla koneellasi $sin\,30$. Tuloksen pitää olla 0,5. Mallista riippuen näppäilet joko ensin 30 ja painat sitten *sin* tai valitset ensin sini - funktion painamalla *sin* ja antamalla sille sitten argumentiksi 30. Jos tulos on jotain muuta, **lue ohjeet laskimesi käsikirjasta**.

Katsotaan nyt laskimesta, minkä kulman sini on 0,8. Funktio, jota nyt käytetään on merkitty koneeseen lyhenteellä sin^{-1}. Saatat joutua painamaan ensin vaihtonäppäintä ja sitten vasta näppäintä, jossa tai jonka lähellä lukee *sin*. Tämä funktio ei siis luultavasti ole näppäimen ensisijainen toiminto, joka on *sin*, vaan sen toissijainen toiminto. Laskimesta riippuen annat joko ensin luvun 0,8 ja painat sitten sin^{-1} tai valitset ensin funktion sin^{-1} ja annat vasta sitten luvun 0,8.

Jos koneesi käyttää jälkimmäistä järjestystä, saat tuloksen näkyviin painamalla vielä näppäintä, jossa lukee ENTER tai jossa on yhtäsuuruusmerkki.

Näet laskimesi avulla, että kulman 53,130 102 354 156 astetta sini on 0,8.

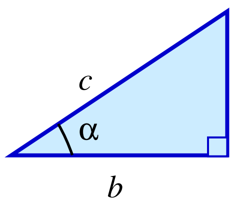
Laskimesi antaa siis sini-funktion arvon, kun annat sille kulman. Mutta käyttämällä toimintoa sin^{-1} näet, että *koneesi antaa myös kulman, kun annat sille sinin*!

Koneessasi on nämä samat toiminnot myös kosinille ja tangentille: siinä ovat sin ja sin^{-1}, cos ja cos^{-1}, tan ja tan^{-1}.

Vastaus: Kulman sini on 0,8 ja kulman asteluku on noin 53º.

Kosini – funktio

Myös *kosinilla* tarkoitetaan kahden janan osamäärää: kulman kosini on kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan suhde.



Kuvan merkinnöin

$$\boxed{cos\,\alpha = \frac{b}{c}}$$

Määritelmä

Suorakulmaisen kolmion suoraa kulmaa pienemmän kulman

kosini on kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan osamäärä.

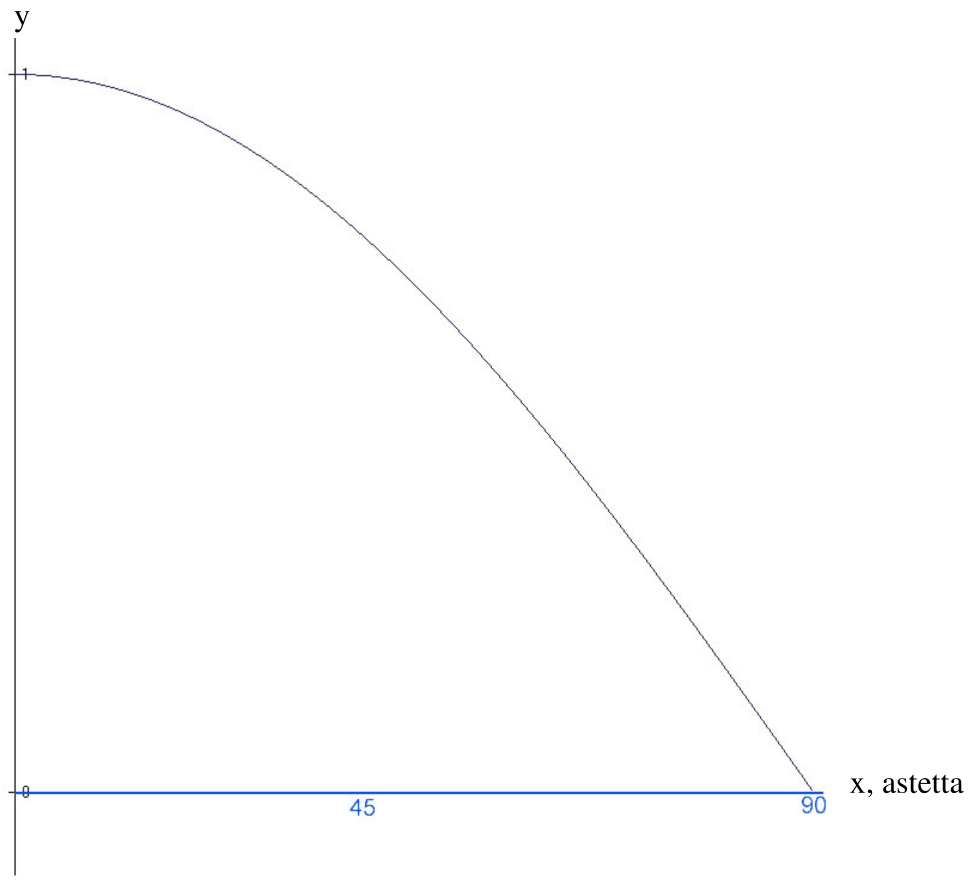
Kulman α kosini kirjoitetaan $cos\,\alpha$. **Esimerkiksi** $cos\,30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Muista, että jos kulma α on nollan ja 90 asteen välissä, niin

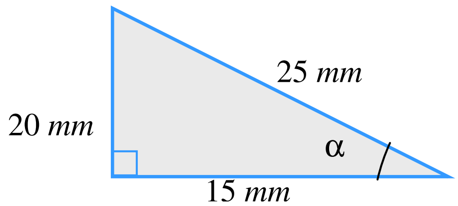
$0 < cos\,\alpha < 1$ ja kosini on vähenevä funktio

Kuvassa kosinin kuvaaja, kun kulma muuttuu nollasta 90:ään asteeseen.

Mitä laskimesi sanoo, jos tarjoat sille ”kiellettyä” kulmaa.



Esimerkki 13



Laske kulman α sini ja tarkista, että saat cos^{-1}-toiminnon avulla kulmaksi jälleen 53°.

Ratkaisu

Kosinin määritelmän mukaan $cos\,\alpha = \frac{15mm}{25mm} = 0{,}6$.

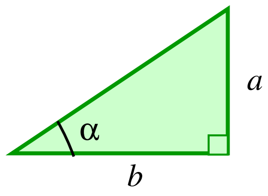
Tarkista, saatko cos^{-1}-toiminnon avulla saman kulman kuin esimerkissä 12.

Laske koneellasi myös 53 asteen kosinin arvo. Tulos on noin 0,601815. Koska pyöristin kulman nyt 53 asteeksi, en tietenkään saa tarkalleen 0,6. Siis $cos\,53° = 0{,}601815$.

Tangentti – funktio

Kulman *tangentti* on sen vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin. Kuvan merkinnöin

$$\boxed{tan\,\alpha = \frac{a}{b}}$$



Määritelmä

Suorakulmaisen kolmion suoraa kulmaa pienemmän kulman

tangentti on kulman vastaisen kateetin ja kulman viereisen kateetin osamäärä.

Kulman α tangentti kirjoitetaan $tan\,\alpha$. **Esimerkiksi** $tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

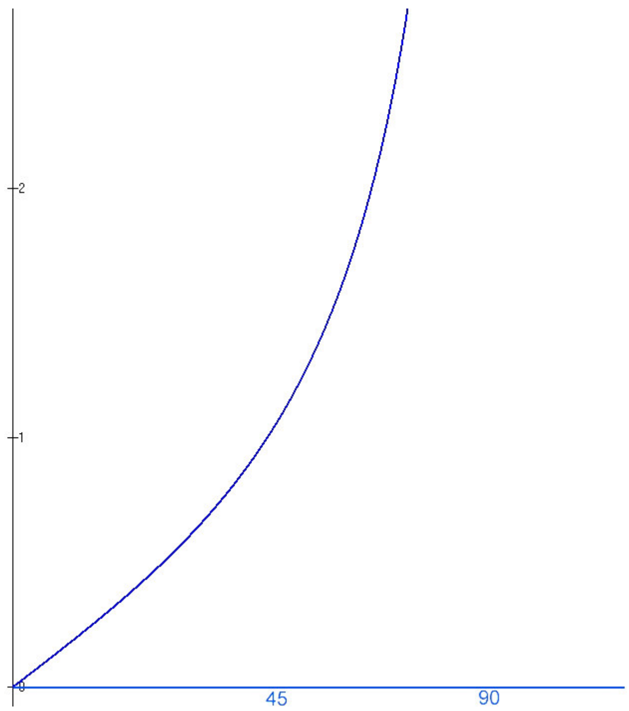
Muista, että jos kulma α on nollaa suurempi, niin

$tan\,\alpha > 0$ ja tangentti on kasvava funktio

Huomaa, että tangentin arvolla ei ole ylärajaa: mitä lähempänä kulma on 90 astetta sitä suurempi on sen tangentti.

Huomaa myös, että trigonometriassa tangentti on funktio, ei mikään suora kuten ympyrän tangentti, joka sivuaa jotain.

Kuvasta näet tangenttifunktion kuvaajan muodon. **Esimerkiksi** $tan\,45° = 1$.



Jos siis suorakulmaisen kolmion kateetit ovat a ja b ja sen hypotenuusa on c ja merkinnät muutenkin kuten edellä, niin $tan\,\alpha = \frac{a}{b}$. Tällöin $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$ ja $cos\,\alpha = \frac{b}{c}$. Lasketaanpa sinin ja kosinin osamäärä:

$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = tan\,\alpha\,,$$

joten

$$\boxed{tan\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}}$$

Tangentti onkin siis myös sinin ja kosinin osamäärä kunhan kulma ei ole 90 astetta! Jos kulma olisi 90º, tulisi kosinista nolla. Se taas tietäisi nimittäjässä vaikeuksia.

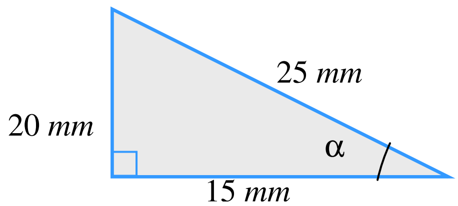
Esimerkki 14

Toista esimerkin 13 laskut nyt tangentin avulla.

Ratkaisu

$$tan\,\alpha = \frac{20mm}{15mm} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33...$$

$tan\,53º$ = 1,32704$\underline{5}$. Tässä viimeinen numero, jonka alleviivasin, tulee pyöristämisen tuloksena.

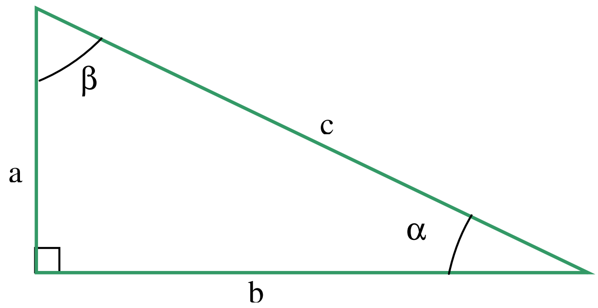


Huomaa, että näitten funktioitten kanssa rajoitamme kulman alle 90:ään asteeseen ja toisaalta vähintään nollaksi. Jos sovimme, että sin 90º = 1 ja cos 90º = 0, saamme nämäkin kulmat näennäisesti mukaan. Sen sijaan sellaista kuin tan 90º ei voi määritellä millään järkevällä tavalla. Kuitenkin tan 0º = 0. Nämä on helppo ymmärtää kuvittelemalla, mitä kolmiolle ja sen sivujen suhteille tapahtuu, kun α kasvaa kohti 90 astetta tai vähenee kohti nollaa. Näitä ääritapauksia emme tarvitse tällä kurssilla.

Esimerkki 15

Suorakulmaisen kolmion yhden kulman asteluku on 65º ja saman kolmion hypotenuusan pituus on 13 cm. Laske kolmion muitten kulmien asteluvut ja sivujen pituudet.

Ratkaisu



Annetaan kolmion osille taas ne tavalliset nimet. Katso kuvaa.

Koska kolmion kulmien summa on 180 astetta, niin nyt käsillä olevan kolmion tuntematon kulma on 180º – 65º – 90º =25º.

Sivujen pituuksien ratkaisemiseksi on siinä mielessä useita oikeita menetelmiä, että käytettävät trigonometriset funktiot voi valita. Pidä kuitenkin koko ajan huoli siitä, että **ymmärrät**, mitä teet.

Koska hypotenuusan pituus on 13 cm, niin c = 13 cm. Koska kolmiomme kulmat ovat 90º, 65º ja 25º ja koska kuvankin kulmilla on yksiselitteinen suuruusjärjestys, niin merkitään $\alpha = 25°$ ja $\beta = 65°$. Suoralle kulmalle ei anneta symbolia kuten ei ennenkään ole annettu.

Kateetit jäävät laskettavaksi. **Kateetti a:**

Koska $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$, niin $a = c \cdot sin\,\alpha$. Lukuarvot sijoittamalla saadaan $a = sin\,25 \cdot 13cm = 5{,}5cm$. Vastaavasti $cos\,\alpha = \frac{b}{c}$, josta $b = cos\,\alpha \cdot c = 12cm$.

Kolmas kulma on siis suora, mutta annetaan sen olla.

Tarkistus: Koska $5{,}5^2 + 12^2 \approx 13^2$, niin tulos on yhtäpitävä Pythagoraan lauseen kanssa. Tästä ei seuraa, että tulos on varmasti oikea. Tulos vain saattaa olla oikea. Voi periaatteessa olla, että tuloksessa on laskuvirhe, joka ei näy tällä testillä. Jos tarkistuksen tulos olisi ollut jotain muuta kuin noin 13, silloin olisimme voineet väittää varmasti, että minä laskin väärin.

Lähtökohdaksi olisi voinut myös valita vaikkapa $cos\,\beta = \frac{a}{c}$.

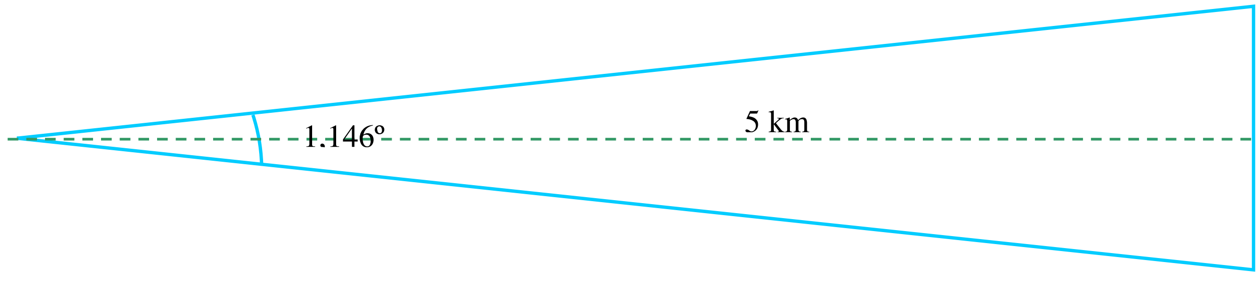
<u>Vastaus</u>: Kateetti a = 5,5 cm, kateetti b = 12 cm, kulma $\alpha = 25°$ ja kulma $\beta = 65°$.

Esimerkki 16

Valkoinen sisävesihöyry kulkee suomalaisella järvellä. Sen yksi matkustaja havaitsee saaren ja arvioi — aivan oikein tietenkin – että saari näkyy 1,146º kokoisena. Hän mittaa tutkalla saaren etäisyyden ja saa tuloksen 5 kilometriä. Kuinka leveä saari on matkustajan suunnasta katsottuna?

Ratkaisu

Piirretään kuva, kuten yleensä kannattaa tehdä. Kuva ei välttämättä ole lähimainkaan tarkka. Sen <u>ainoa</u> tarkoitus on tarjota tukea ajatuksille.



Etäisyyttä ilmaiseva jana, jota kuviossa merkitsen vain yksinkertaisesti kirjoittamalla ”5 km”, on tietenkin kohtisuorassa saaren eli kuvion leveyttä matkustajan kannalta ilmaisevaa janaa vastaan. Merkitään, vaikka kuvassa merkintää ei ole, että saaren leveys matkustajan näkökulmasta on *x*. Saamme yhtälön

$$tan\left(\frac{1{,}146°}{2}\right)=\frac{\frac{x}{2}}{5km},$$

josta

$$x=2\cdot 5km\cdot tan\left(\frac{1{,}146°}{2}\right)=0{,}1km\,.$$

<u>Vastaus</u>: Matkustajan suunnasta katsottuna saaren leveys on 100 metriä.

Huomaa, että esimerkin 16 kulma annettiin (epärealistisen tarkkana) desimaalilukuna ja että

1,146º = 1º 8’ 45,6”.

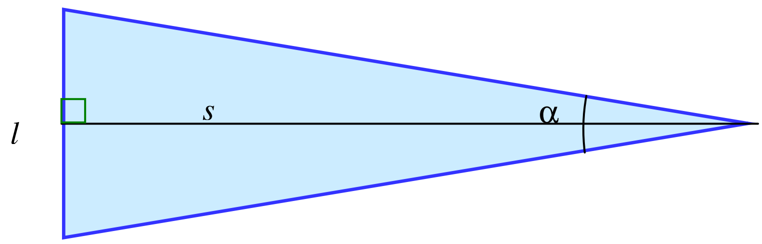
Esimerkki 17

Kuinka suurena eli missä kulmassa 200 metriä pitkä laiva näkyy 3 kilometrin etäisyydeltä?

Ratkaisu

Piirretään kuva. Merkitään kysyttyä kulmaa α:lla. Kuvan merkinnöin

$$tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{s}=\frac{200m}{2\cdot 3km},$$



josta

$$\frac{\alpha}{2}=1{,}9°$$

ja siis

$$\alpha=3{,}8°\,.$$

Vastaus: Laiva näkyy 3,8 asteen kokoisena.

Kolmion pinta-ala

Kolmion pinta-ala A lasketaan kavalla

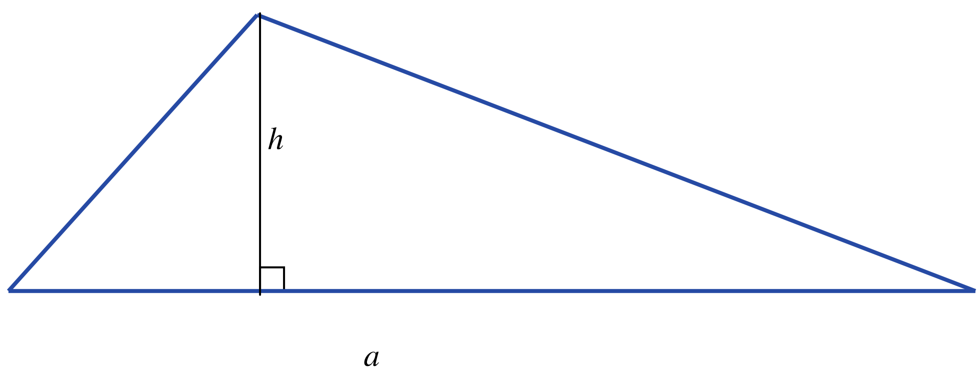
$$\boxed{A = \frac{1}{2}ah},$$

missä a on kolmion kannan pituus ja h sen korkeus.

Jotta voimme laskea kolmion alan, joudumme siis etsimään sen korkeuden lukuarvon sekä sen sivun pituuden, jota vastaan korkeus on piirretty eli sen kannan. Lähestytään tätä asiaa nyt esimerkkien avulla.

Esimerkki 18

Kuvan kolmion alahan on puolet kannan ja korkeuden tulosta.

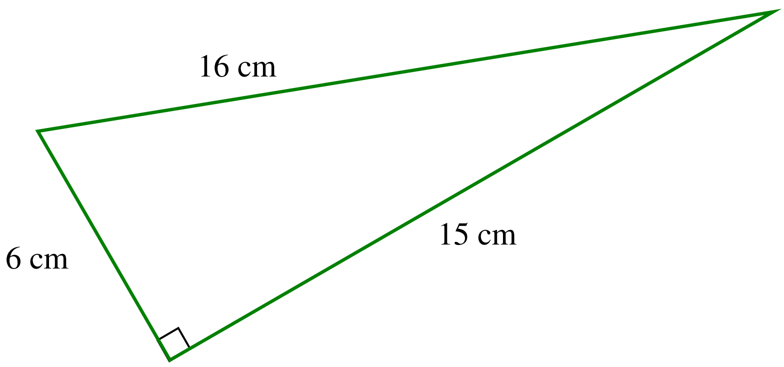


Jos kolmion korkeus on 60 senttiä ja kanta 200 senttiä, niin sen pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 60cm \cdot 200cm = 6000cm^2 = 0{,}6m^2.$$

Esimerkki 19

Jos kolmio on suorakulmainen ja sen sivut tunnetaan, tiedetään myös sen korkeus. Toinen kateetti voidaan valita korkeudeksi, toinen kannaksi. Kuvassa on tämmöinen tilanne.



Tarkistetaan ensin, että kolmio on todella suorakulmainen eikä tehtävän asettaja sahaa sinua linssiin. Lasketaan $\sqrt{6^2+15^2}$. Tulos on 16,155…. Se on alkuperäisissä luvuissa käytetyn tarkkuuden puitteissa 16, joten annettujen tietojen puitteissa kolmio on suorakulmainen.

Tämän kolmion korkeudeksi kannattaa valita 6 cm (tai 15 cm) ja kannaksi 15 cm (tai 6 cm). Näin sen pinta-alaksi saadaan

$$\frac{1}{2} \cdot 6cm \cdot 15cm = 45cm^2$$

Kolmion ala on siis 45 neliösenttiä.

Esimerkki 20

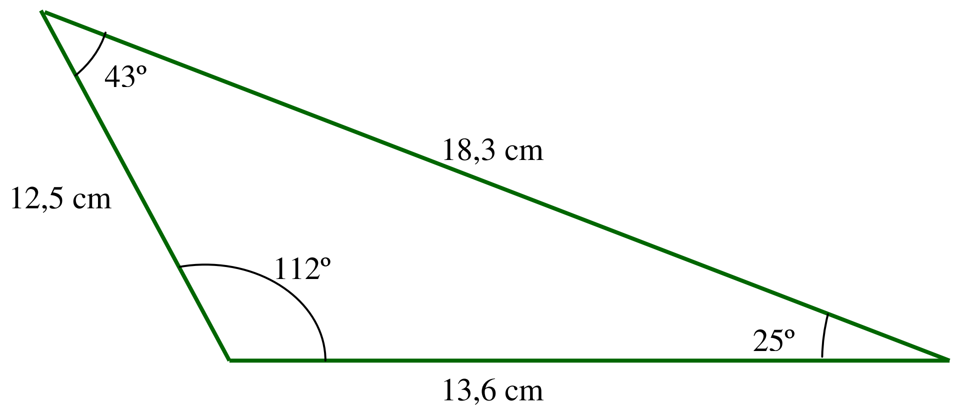
Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 8 metriä ja hypotenuusan pituus 10 metriä. Laske kolmion pinta-ala.

Ratkaisu

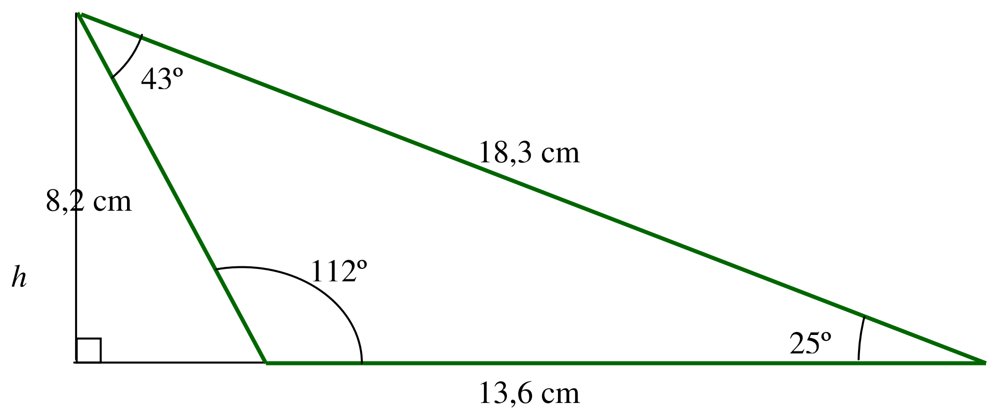
Koska kyseessä on suorakulmainen kolmio, kannattaa laskea toisen kateetin pituus Pythagoraan lauseen avulla. Se on $\sqrt{10^2-8^2}=6$. Kateettien pituudet ovat siis 8 metriä ja 6 metriä, joten kolmion pinta-ala on $\dfrac{8m \cdot 6m}{2} = 24m^2$.

Vastaus: Kolmion ala on $24m^2$.

Esimerkki 21



Laske kolmion ala, kun tilanne on kuvan mukainen. Kaikki muut mitat on annettu, mutta ei korkeutta, joka pinta-alaa laskiessa tarvitaan. Se on siis laskettava. Otan kuvasta uuden kopion ja lisään siihen korkeusjanan. Merkitsen korkeusjanaa kirjaimella *h*. Tällöin tarvitsen myös kannan jatkeen ja piirrän vielä senkin.



Korkeusjana *h* on nyt sellaisen suorakulmaisen kolmion kateetti, jonka hypotenuusa on alkuperäisen kolmion 12,5 cm pitkä sivu. Alkuperäisen kolmion 112 asteen vieruskulman suuruus on 180º – 112º eli 68º. Tarvitsen tämän kulman, sillä

$$sin\,68° = \frac{h}{12{,}5cm},$$

josta

$$h = 12{,}5cm \cdot sin\,68°.$$

Kolmion ala on siis

$$\frac{1}{2}\cdot 13{,}6cm \cdot h = \frac{1}{2}\cdot 13{,}6cm \cdot 12{,}5cm \cdot \sin 68^\circ$$
$$= 79cm^2$$

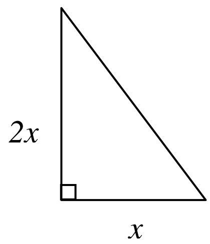
<u>Vastaus</u>: Kolmion pinta-ala on noin 79 neliösenttiä.

Esimerkki 22

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on kaksi kertaa niin pitkä kuin toinen kateetti. Laske kolmion sivujen pituudet ja kulmien suuruudet, kun kolmion pinta-ala on $158\,km^2$.

Ratkaisu

Piirretään kuva, johon merkitään annetut tiedot. Merkitään toista kateettia *x:llä*, jolloin toinen on *2x*.



Koska ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta eli puolet kateettien tulosta, niin

$$\frac{1}{2}\cdot x \cdot 2x = 158km^2,$$

josta

$$x \approx \pm 12{,}6km.$$

Koska kateetti kolmion sivuna on aina nollaa suurempi, niin negatiivinen tulos hylätään ja toinen kateetti on 12,6 kilometrin pituinen ja toinen 25,1 kilometrin pituinen.

Huomaa, että en käyttänyt äskeistä välitulosta, vaan laskimen maksimitarkkuutta kertomalla laskimen sisäisen tuloksen kahdella ja pyöristämällä sitten sen.

Hypotenuusa saadaan nyt Pythagoraan lauseen nojalla. Merkitään sitä *c:llä*.

$$c = \sqrt{(12{,}6km)^2 + (25{,}1km)^2}$$
$$= 28{,}1km$$

Hypotenuusan pituus on siis noin 28,1 kilometriä.

Olkoon lyhyempi kateetti nimeltään *a* ja pidempi vastaavasti *b*. Tämän voidaan katsoa antavan nimet myös kolmion kulmille suoraa kulmaa lukuun ottamatta. Joten

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \\ \tan\beta = \dfrac{2x}{x} = 2 \end{cases}$$

Laskimella saamme nyt

$$\begin{cases} \alpha = 26{,}6° \\ \beta = 63{,}4° \end{cases}$$

Koska näitten kahden kulman summa on 90 astetta, niin kolmion kaikkien kulmien summa on 180 astetta, kuten pitääkin.

Vastaus: Kolmion kateettien pituudet ovat 12,6 kilometriä, 25,1 kilometriä ja hypotenuusan pituus on 28,1 kilometriä. Kolmion kaksi kulmaa ovat 26,6 asteen ja 63,4 asteen suuruiset.

Nelikulmion pinta-ala

”Hankalan” muotoisen nelikulmion pinta-ala on usein laskettavissa jakamalla nelikulmio kahdeksi kolmioksi. Aloitetaan nelikulmioitten pinta-alojen tarkasteleminen kuitenkin helpommista tilanteista.

Suorakulmio

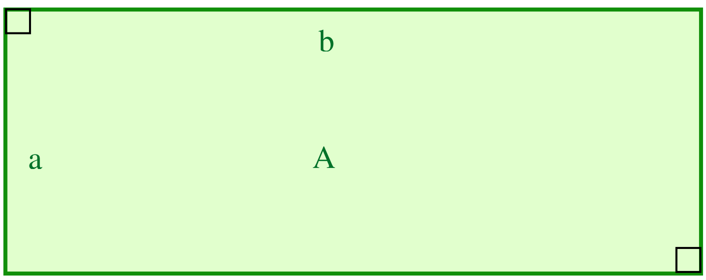
Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria. Lähestytään sen pinta-alaa tarkastelemalla tilannetta, missä sinulla on ruutupaperille rajattuna alue. Olkoon siinä kylki kyljessä kahdeksan kappaletta 11 ruudun jonoja. Tällöin paperille rajaamasi alue koostuu $8 \cdot 11 = 88$ ruudusta eli sen pinta-ala on 88 ruutua.

Ota nyt samassa kuviossa käyttöön pienemmät yksiköt. Sanotaan vaikka, että kuviosi jokaisen ruudun koko on $7mm \cdot 7mm$. Alueesi leveys on silloin $8 \cdot 7mm = 56mm$ ja sen pituus on vastaavasti $11 \cdot 7mm = 77mm$. Kyseessä on jälleen ruuduista koostuva alue. Nyt ruudut ovat pienemmät eli yhden neliömillin kokoisia. Ala lasketaan ihan samalla tavalla kuin ensimmäisellä kerralla. Se on $56mm \cdot 77mm = 4312mm^2$. Olennaista tässä on se, että suorakulmion ala laskettiin samalla tavalla eli laskettiin kahden kohtisuoran sivun tulo.

Suorakulmion ala lasketaan kertomalla leveys ja korkeus keskenään.

Kuvan merkinnöin:

$$\boxed{A = ab}$$



Neliö on suorakulmion eräs erikoistapaus. Neliö syntyy, kun valitaan a = b. Neliön ala saadaan siis laskemalla sen sivun neliö

$$\boxed{A = a^2}$$

Esimerkki 23

Tavallisen A4-arkin leveys on 210 milliä ja sen korkeus 297 milliä. Kuinka suuren alueen voi kattaa 200 kappaleella A4-arkkeja? Ilmoita tulos neliömetreinä.

Ratkaisu

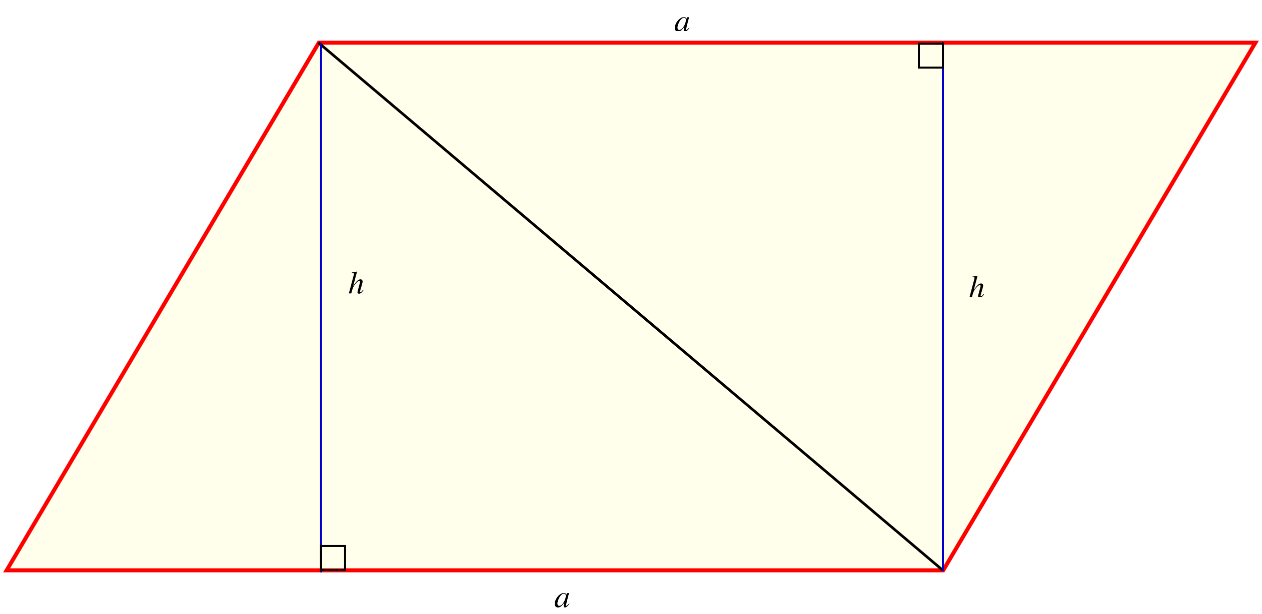
Koska A4-arkki on suorakulmio, niin yhden arkin pinta-ala on $210mm \cdot 297mm = 62370mm^2$. Kaksi sataa tämmöistä arkkia kattavat yhteensä alan 12 474 000 mm^2, joka on 12,474 neliömetriä.

Vastaus: Kahdella sadalla A4-arkilla voi kattaa noin 12,5 neliömetrin alan.

Suunnikas

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja tällöin myös yhtä pitkät. Täten suorakulmiokin on suunnikas, mutta suunnikas ei välttämättä ole suorakulmio, koska suunnikkaan kulmat eivät välttämättä ole suorat.

Piirrän nyt suunnikkaan, jonka jaan lävistäjällä heti kahteen kolmioon. Piirrän näkyviin myös kaksi suunnikkaan korkeusjanaa. Nämä korkeusjanat ovat myös kolmioitten korkeusjanat. Annan korkeusjanalle (itselleen ja sen pituudelle) symbolin h sekä suunnikkaan pitkän sivun pituudelle (ja sille itselleen symbolin) a.



Molempien piirrettyjen kolmioitten alat ovat $\frac{1}{2}ah$. Suunnikkaan ala, joka on näitten summa, on siten ah.

Suunnikkaan pinta-ala on kanta kertaa korkeus eli

$$\boxed{A = ah}$$

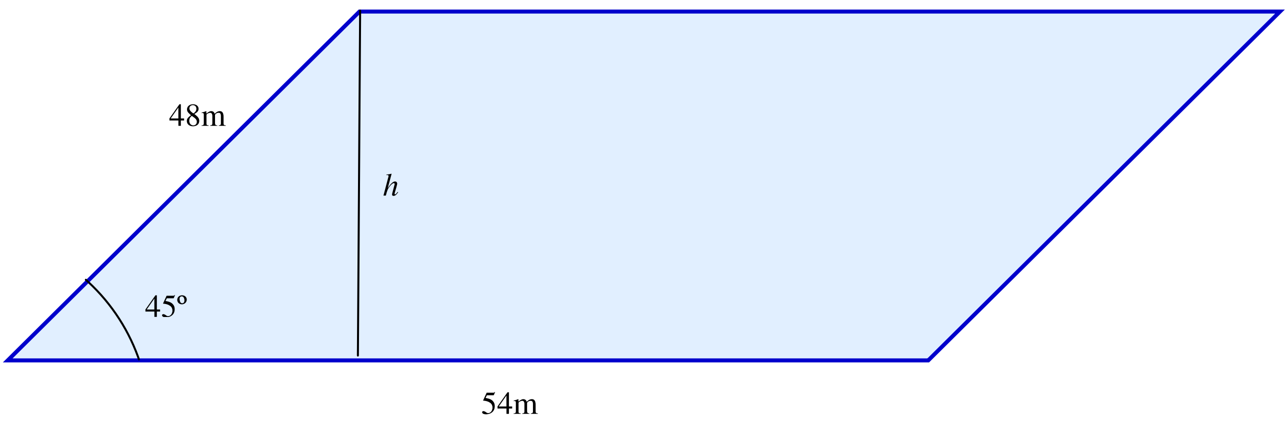
kun A on ala, h on korkeus ja a on kanta.

Esimerkki 24

Laske suunnikkaan pinta-ala, kun sen erisuuntaisten sivujen välinen kulma on 45º ja niitten pituudet ovat 48 metriä ja 54 metriä.

Ratkaisu

Piirrän taas kuvan ajatuksia tukemaan.



Piirretään korkeusjana kärjestä kannalle. Kuvassa se on jälleen jana *h*. Sinifunktion määritelmän mukaan:

$$\sin 45° = \frac{h}{48m},$$

josta

$$h = 48\text{m} \cdot \sin 45°$$

Koska suunnikkaan ala A on kanta kertaa korkeus, niin saadaan

$$A = 54\text{m} \cdot 48\text{m} \cdot \sin 45° = 1833\, m^2.$$

Vastaus: Suunnikkaan pinta-ala on $1833\,m^2$.

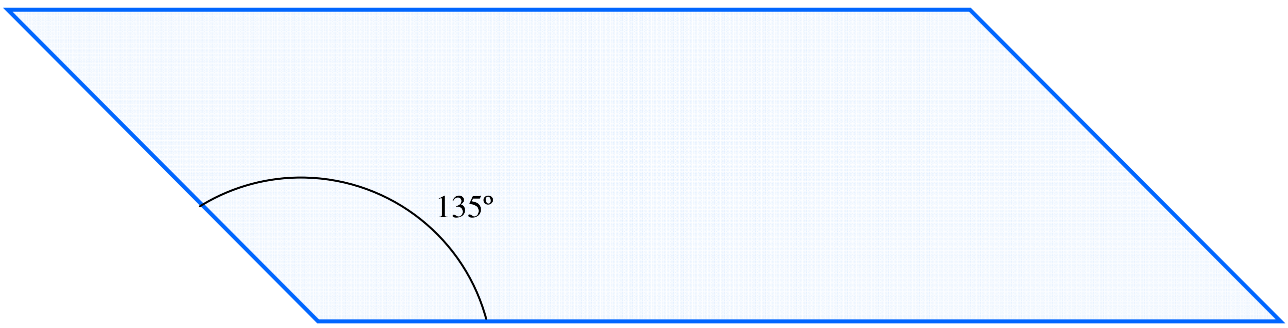
Otetaan vielä esimerkki tilanteesta, jossa suunnikkaan korkeusjana näyttää joutuvan suunnikkaan itsensä ulkopuolelle.

Esimerkki 25

Valitaan muuten sama suunnikas kuin esimerkissä 24, mutta erisuuntaisten sivujen välinen kulma on nyt 135 º.

Ratkaisu

Tilanne on oheisessa kuvassa.



Yksi mahdollisuus ratkaista tämä tehtävä on jatkaa kantaa vasemmalle ja piirtää korkeusjana sitten tälle jatkeelle, jolloin se on suunnikkaan ulkopuolella. Toinen mahdollisuus on piirtää korkeusjana toisesta kärjestä alas. Tällöin korkeusjana jääkin suunnikkaan sisäpuolelle ja tarkasteltava suunnikkaan kulma on 45º. Piirrän molemmat vaihtoehdot seuraavaan kuvaan.

Tehtävä ratkaistaan kuten esimerkki 24, toisin sanoen, jälleen

$$\sin 45° = \frac{h}{48m}$$

ja $h = 48\text{m} \cdot \sin 45°$, joten suunnikkaan ala A on

$$A = 54\text{m} \cdot 48\text{m} \cdot \sin 45^\circ = 1833\, m^2 .$$

Vastaus: Suunnikkaan pinta-ala on $1833\, m^2$.

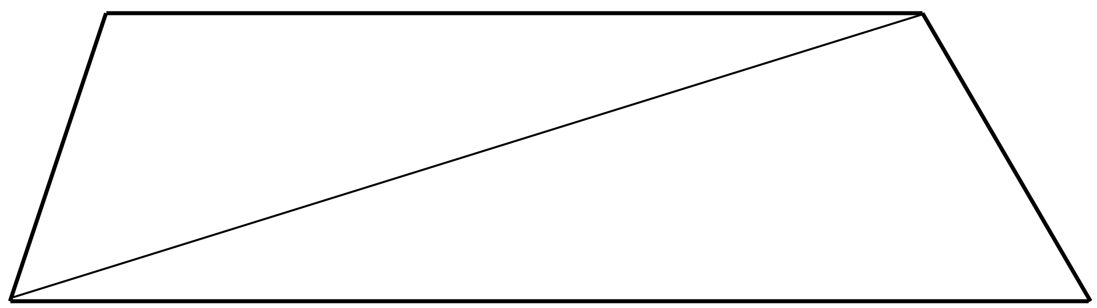
Puolisuunnikas

Puolisuunnikas on nelikulmio, jolta ei vaadita, että sen kaikki vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. *Puolisuunnikkaalla on vähintään yksi yhdensuuntaisten sivujen pari*. Toinen näistä yhdensuuntaisista voidaan valita *puolisuunnikkaan kannaksi*.

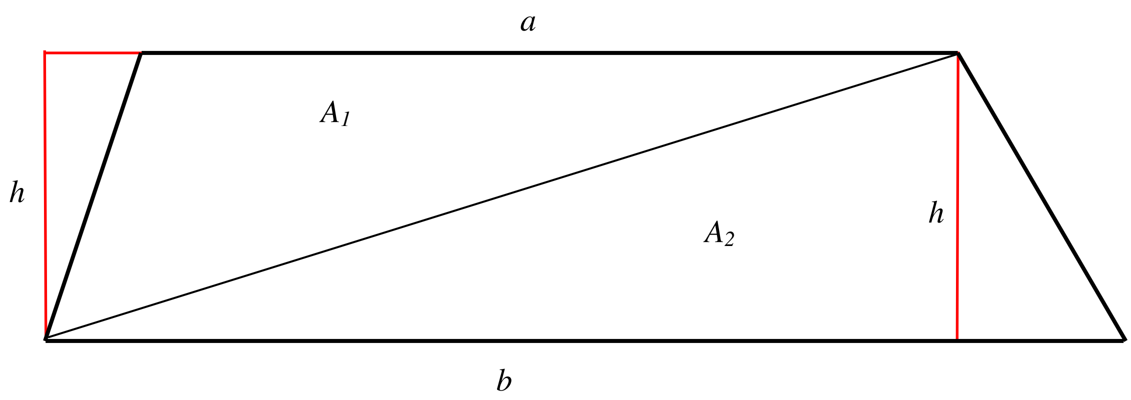
Puolisuunnikas määritellään siis luopumalla yhdestä suunnikkaan ominaisuudesta. Tässä mielessä suunnikaskin on puolisuunnikas.

Tutkitaan puolisuunnikkaan alaa piirtämällä puolisuunnikas ja jakamalla se sitten kolmioihin samaan tapaan kuin edellä.

Piirrän siis puolisuunnikkaan ja sille lävistäjän:



Otan puolisuunnikkaastani uuden kopion ja piirrän seuraavat apuviivat tähän uuteen kopioon punaisella. Apuviivat ovat kannan jatke — ylempi kahdesta yhdensuuntaisesta on sekin nyt kanta — ja kaksi korkeusjanaa *h*. Annan molemmille kannoille myös yksilöllisen nimen.



Ylemmän kolmion ala — merkitään A_1:llä — on $\frac{1}{2}ah$ ja alemman kolmion ala — vastaavasti A_2 — on $\frac{1}{2}bh$. Jos puolisuunnikkaan koko alaa merkitään *A:llä*, niin

$$A = A_1 + A_2,$$

joten

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}h(a+b) \\ &= \frac{a+b}{2} \cdot h \end{aligned}$$

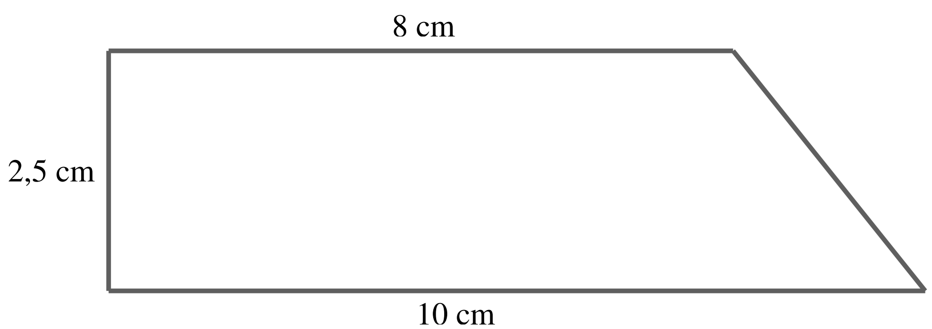
Yhtälön viimeisen muodon kirjoitin, koska siitä puolisuunnikkaan alan laskeminen on helppo tulkita niin, että puolisuunnikkaan ala on yhdensuuntaisten sivujen *a* ja *b* keskiarvolla eli $\frac{a+b}{2}$:llä kerrotaan korkeus *h*.

Puolisuunnikkaan ala on yhdensuuntaisten sivujen keskiarvon ja puolisuunnikkaan korkeuden tulo eli

$$\boxed{A = \frac{(a+b)}{2} \cdot h}$$

Esimerkki 26

Kiilan poikkileikkaus on kuvan mukaisen puolisuunnikkaan muotoinen. Laske kiilan poikkileikkauksen ala, kun sen yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 8 cm ja 10 cm ja sen korkeus on 2,5 cm.



Ala on siis $\frac{(8cm+10cm)}{2}\cdot 2{,}5cm = 100cm^2$.

Vastaus: Kiilan poikkipinnan ala on 100 cm^2.

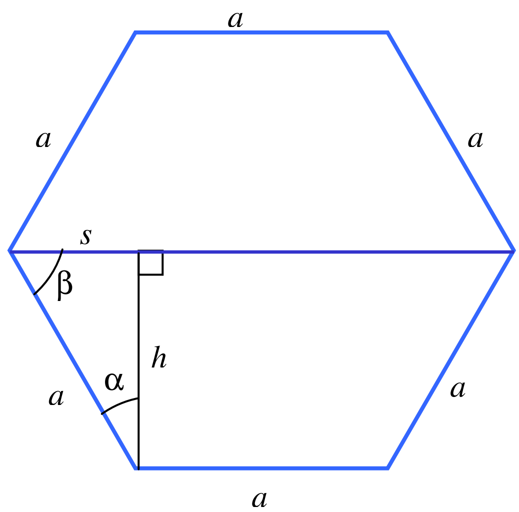
Esimerkki 27

Rakennukseen tehdään ikkuna, joka on kahden, pitkät yhdensuuntaiset sivut vastakkain asetetun tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoinen. Ikkunalta vaaditaan myös, että sen kaikki sivut ovat samanmittaiset ja että sen pinta-ala on 2 m^2. Kuinka leveä ja korkea ikkuna on?

Ratkaisu

Merkitään yhden puolisuunnikkaan korkeutta kirjaimella *h*, yhtä pitkien sivujen pituutta kirjaimella *a* ja pisintä sivua kirjaimella *b*. Tällöin ikkunan korkeus on 2*h* ja lisäksi

$$2\cdot\frac{a+b}{2}\cdot h = 2m^2$$



Olkoon vielä sivun *a* ja pisimmän sivun pituusero 2*s*.

Valitaan yksi tuntematon, jonka avulla muut kirjoitetaan. Hyvä vaihtoehto tähän näyttää olevan ikkunan sivu *a*.

Koska ikkuna on myös säännöllinen kuusikulmio, sen kahden sivun välinen kulma on 120 asteen suuruinen, joten β = 60º, jolloin α = 30º (kolmion kulmien summa on 180º).

Lasketaan korkeus ensin. Kosini -funktion määritelmän mukaan on

$$cos\,\alpha = \frac{h}{a},$$

joten

$$h = a\cdot cos\,30° = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}.$$

Lisäksi

$$cos\,\beta = \frac{s}{a},$$

josta

$$s = a \cdot cos\,60° = \frac{a}{2}.$$

Koska puolisuunnikkaitten pitkä sivu $b = a + 2s$, niin edellä oleva ikkunan pinta-alan yhtälö

$$2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = 2m^2$$

saadaan muotoon

$$\left(a + a + 2 \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}},$$

josta

$$a = +\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}}} \text{ (metriä).}$$

Koska kyseessä on janan pituus, niin negatiivinen arvo ei tule kysymykseen.

Koska $h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$, niin yhden puolisuunnikkaan korkeus on

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}} \text{ metriä}$$

ja ikkunan koko korkeus on siis $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ metriä (eli noin 1,52 metriä).

Ikkunan leveys on $b = a + 2s = a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 2a = \frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}} (\approx 1{,}75)$ metriä.

<u>Vastaus</u>: Ikkunan korkeus on $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ metriä ja leveys on $\frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$ metriä.

Huomaa, että välitulosten likiarvoja ei käytetty laskuissa vaikka niitä annettiin!

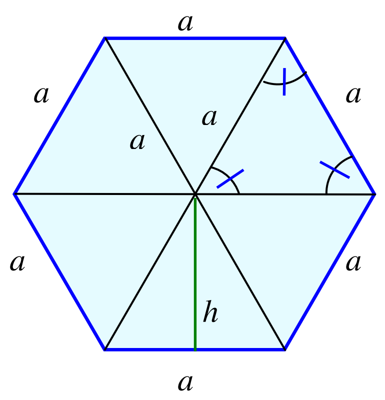
II tapa

Tämä tehtävä voidaan laskea kokonaan myös niitten tietojen avulla, mitä meillä on säännöllisestä kuusikulmiosta. Lasketaan se vielä niinkin.

Ratkaisu

Olkoon säännöllisen kuusikulmion sivun pituus a. Säännöllisen kuusikulmion voidaan ajatella koostuvan kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden kaikkien kulmien suuruudet ovat 60 astetta. Koska kolmiot ovat siis tasasivuiset, kunkin kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät eli niitten pituus on a. Piirretään kolmiolle korkeusjana h säännöllisen kuusikulmion sivulle. Lasketaan kolmion korkeus, jolloin meillä on riittävät tiedot ikkunan korkeuden laskemiseksi: ikkunan korkeus on $2h$.

Pythagoraan lauseen mukaan $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, joten $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Koska kuusikulmion ala on kuusi kertaa yhden kolmion ala, saadaan yhtälö

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2.$$

Ikkunan alahan on 2 m^2. Kun yhtälö ratkaistaan, saadaan

$$a = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}}},$$

joten

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Saatiin samat tulokset *a:lle* ja *h:lle* ja niin ollen myös ikkunan korkeudelle ja leveydelle.

Vastaus: Ikkunan korkeus on $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ metriä ja leveys on $\frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$ metriä.

Keskeisiä käsitteitä