Aluksi

Geometriassa tulee silloin tällöin eteen tilanne, jossa piirroksen tekeminen koordinaatistoon yksinkertaistaa laskuja. Toisinaan taas tilanne on ”muuten vaan” helpompi mieltää koordinaatiston avulla.

Tämä luku nojaa vahvasti esimerkkeihin. Aloitetaan palauttamalla mieleen, mitä koordinaatistolla tarkoitetaan.

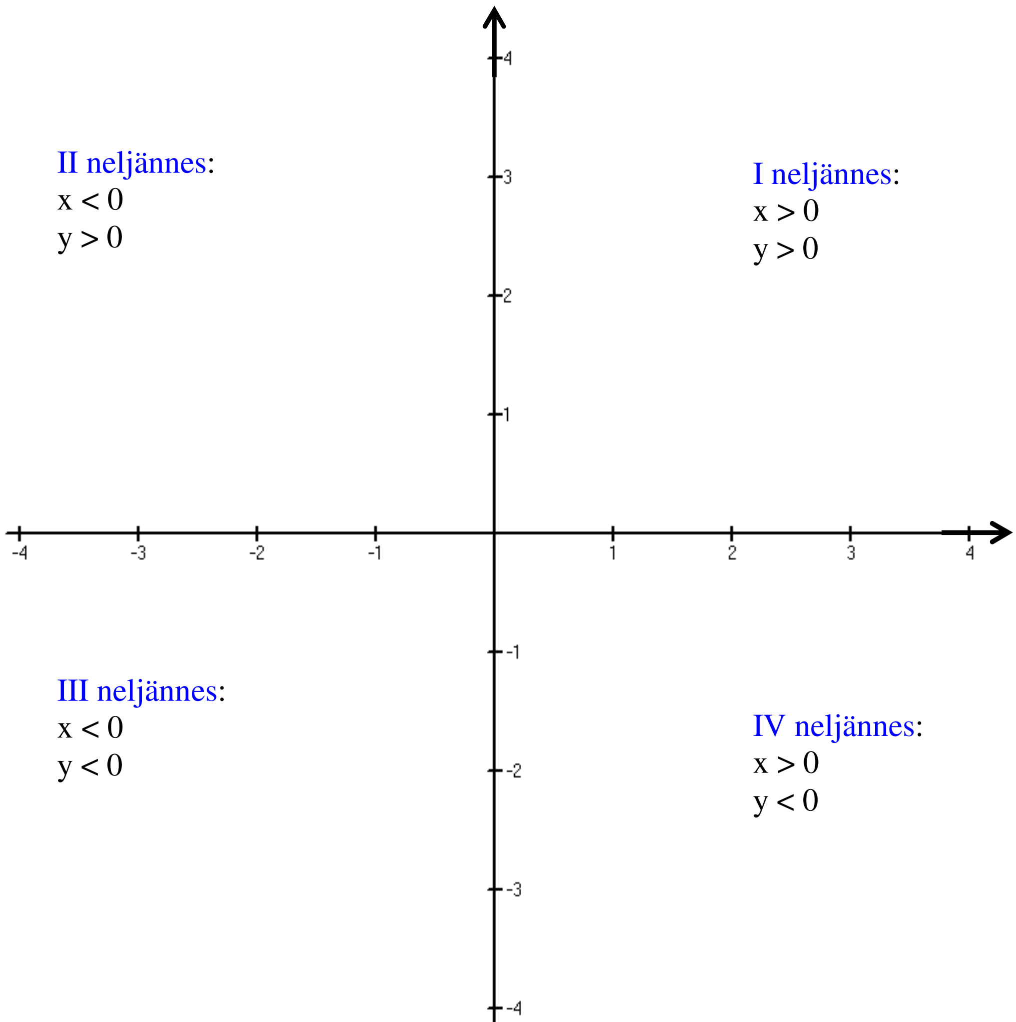
Suoraviivainen, suorakulmainen koordinaatisto

Koordinaatiston suoraviivaisuus tarkoittaa sitä, että *koordinaattiakselit* ovat suorat ja suorakulmaisuus sitä, että koordinaattiakselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Käytämme siis koordinaatistoa, jonka akselit ovat kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa suoraa ja jotka leikkaavat toisensa pisteessä, jota sanotaan *origoksi*. Toinen akseli on vaakasuora, toinen pystysuora. Vaakasuoraa akselia kutsutaan *x – akseliksi* tai *abskissaksi* ja pystysuoraa akselia sanotaan *y – akseliksi* tai *oordinaataksi*.

Koordinaatiston piste on lukupari (x,y), missä luku x mitataan origosta oikealle ja luku y origosta ylöspäin, kun nuo luvut ovat positiiviset. Negatiivisten lukujen itseisarvo kasvaa luonnollisesti vastakkaiseen suuntaan.

Vaakasuoran eli x – akselin kasvusuunta on siis vasemmalta oikealle ja y – akselin alhaalta ylös. Origo on piste (0,0).

Jos x tai y tai molemmat ovat desimaalilukuja, niin komponenttien x ja y välillä oleva pilkku korvataan puolipisteellä. Kuva esittelee koordinaatiston ja koordinaattien kasvusuunnat sekä koordinaattiakselien rajaamat *neljännekset*!

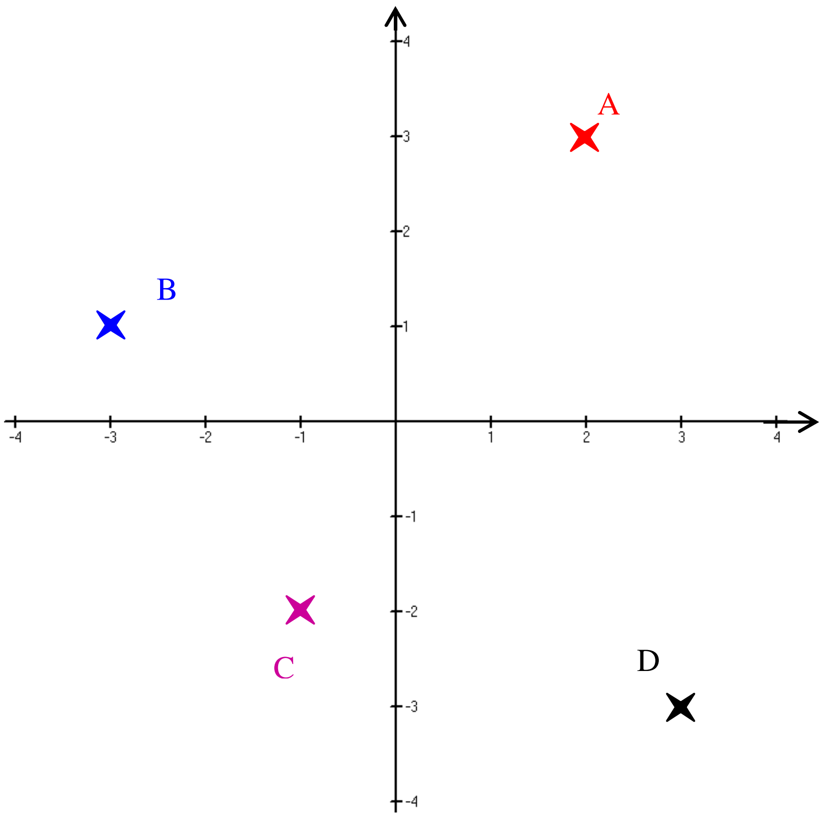


Koordinaatiston pisteille annetaan nimi eli symboli joko kirjoittamalla yhtälö, kuten A = (–1,1) tai kirjoittamalla pisteen koordinaatit ja pisteen symboli rinnakkain, kuten A(–1,1).

Esimerkki 1

Merkitsen koordinaatistoon pisteet A = (2,3), B = (–3,1), C = (–1,–2) ja D = (3,–3) ja koodaan ne väreillä. Toivon, että värikoodaus auttaa sinua tunnistamaan ne kuvasta.

Pisteen C määritelmä (–1,–2) tarkoittaa sitä, että pisteeseen C tullaan lähtemällä origosta ensin x – akselia pitkin yksi yksikkö vasemmalle eli negatiiviseen suuntaan ja sitten kaksi yksikköä suoraan alas eli negatiivisen y – akselin suuntaan.



Esimerkki 2

Lasketaan janan AB pituus sekä keskipisteen koordinaatit, kun A ja B ovat **esimerkin 1** pisteet.

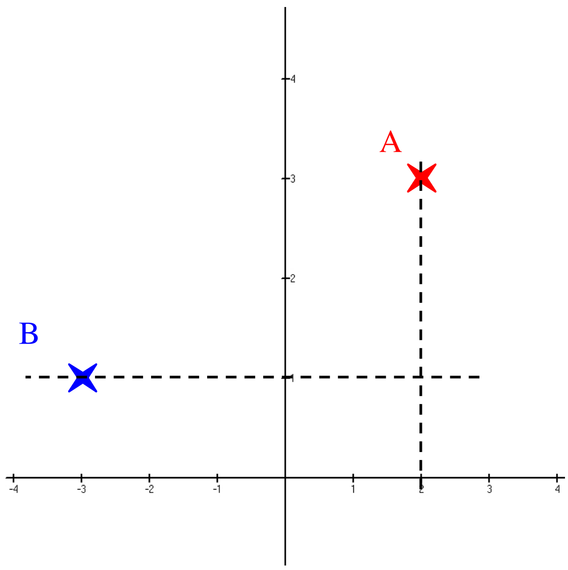
Ratkaisu

Janan AB pituuden laskeminen perustuu Pythagoraan lauseeseen. Piirretään uusi kuva ja siihen katkoviivoilla vaakasuora jana, joka kulkee pisteen B kautta sekä pystysuora jana, joka kulkee pisteen A kautta. Pystysuoran janan x – koordinaatti on sama kuin A:n x – koordinaatti ja vaakasuoran janan y – koordinaatti on sama kuin B:n y – koordinaatti. Sama pätee tietenkin niitten leikkauspisteelle, joten kun leikkauspistettä merkitään E:llä, niin E = (2,1).

Tästä saadaan nyt janojen AE ja BE pituudet. Ne ovat:

AE:n pituus on 3 – 1 =2

BE:n pituus on 2 – (–3) = 5



Koska kulma AEB on suora, AB:n pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$$|AB|^2 = 5^2 + 2^2,$$

josta

$$|AB| = \sqrt{29} \approx 5{,}3.$$

Janan AB keskipisteen koordinaatit ovat AB:n päätepisteiden koordinaattien keskiarvot eli, jos keskipistettä merkitään kirjaimella P, niin $P = (\frac{2+(-3)}{2}, \frac{3+1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 2)$.

Lasketaan nyt tarkistuksen vuoksi vaikkapa pisteen A etäisyys pisteestä P. Pythagoraan lauseen avulla saadaan taas, että etäisyys on $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$, mikä on puolet janan AB pituudesta kuten pitääkin.

Saadaan siis, että janan AB pituus on $\sqrt{29}$ ja että sen keskipisteen koordinaatit ovat $(-\frac{1}{2}, 2)$.

<u>Yleisesti</u>, jos janan päätepisteet ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), niin

$$\boxed{\text{janan pituus on } \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ja

$$\boxed{\text{janan keskipiste on } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

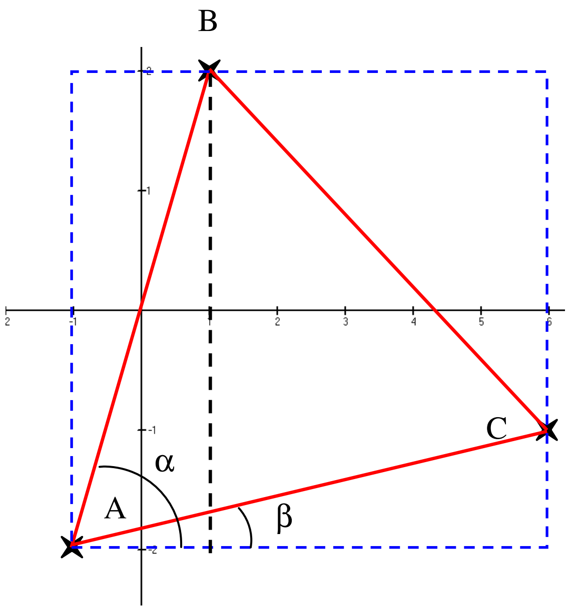
eli keskipisteen koordinaatit ovat vastaavien janan koordinaattien keskiarvot.

Seuraavassa muutamia tyypillisiä tilanteita, joissa koordinaatiston käyttäminen helpottaa laskuja.

Esimerkki 3

Kolmion kärkien koordinaatit ovat A(–1,–2), B(1,2) ja C(6,–1). Laske kolmion ala sekä janojen AB ja AC välisen kulman suuruus.

Ratkaisu



Piirretään tilanne koordinaatistoon.

Kopioi kuva vihkoosi — paperin ruudut ovat tärkeät — ja täydennä sitä alla olevan selostuksen edessä. Saatat esimerkiksi hyötyä siitä, että annat nimet kaikille pisteille, mihin selostus viittaa eikä ainoastaan niille, jotka minä olen merkinnyt omaan piirrokseeni. Tällaisia pisteitä ovat ainakin suorakulmion kärjet. ”Käännä” selostus sitten sellaiseksi, että se käyttää näitä nimiä.

Huomaa, että minun piirroksessani yhden yksikön mittainen matka on käytännön syistä y – akselilla paljon pitempi kuin x – akselilla. Tämä vääristää mittasuhteet, mutta ei itse asiaa. Sinä haluat ehkä käyttää omassa piirroksessasi samaa mittakaavaa molemmilla akseleilla.

Piirretään ensin pisteet A, B ja C. Yhdistetään ne punaisilla janoilla. Piirretään vielä sinisellä katkoviivalla suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset ja kulkevat kolmion kärkien kautta. Alkuperäisen kolmiomme piiri jakaa suorakulmion neljään eri kolmioon. Niistä yksi on mainittu ”alkuperäinen kolmio”.

Kukin annetun kolmion sivu on tarkalleen yhden suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Minä käytän tällä kertaa näistä suorakulmaisista kolmioista tämän ajatuksen mukaisia nimiä kuten esimerkiksi ”janan AB suorakulmainen kolmio”. Tämä tapa nimetä olioita on epästandardi, mutta lievittää nyt symbolien sekamelskaa.

Annetun kolmion pinta-alan laskeminen perustuu näitten kolmioitten yhteenlasketun pinta-alan vähentämiseen siniviivaisesta suorakulmiosta.

Janan AB suorakulmaisen kolmion suorankulman kärki on pisteessä (–1,2), koska sen x – koordinaatti on sama kuin A:n x – koordinaatti ja sen y – koordinaatti on sama kuin B:n y – koordinaatti. Vastaavalla tavalla saadaan muiden suorakulmion kärkipisteiden koordinaatit. Ne ovat (6,2), (6,–2) ja (–1,–2).

Koska piste (–1,2) on kahden yksikön ja piste (–1,–2) samoin kahden yksikön päässä x – akselista, on näitten kahden pisteen etäisyys toisistaan neljä yksikköä. Siis janan AB suoran kulman toinen kateetti on neljän yksikön pituinen. Vastaavasti pisteet (–1,2) ja (1,2) ovat molemmat yhden yksikön päässä x - akselista ja siis kahden yksikön päässä toisistaan. Siis sen suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa jana AB on, pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2$ eli 4 pinta-alan yksikköä.

Muitten suorakulmaisten kolmioitten alat saadaan samalla tavalla. Ne ovat $7\frac{1}{2}$ ja $3\frac{1}{2}$ alan yksikköä. Laskemalla nämä yhteen, havaitaan, että kaikkien kolmioitten alat ovat yhteensä 15 pinta-alan yksikköä. Suorakulmion ala on puolestaan $4 \cdot 7$ eli 28 pinta-alan yksikköä. Vähentämällä tästä kolmioitten yhteenlaskettu ala, saadaan alkuperäisen kolmion alaksi 13 pinta-alan yksikköä.

Janojen AB *ja* AC *välisen kulman suuruus* saadaan laskemalla ensin näitten kummankin janan x – akselin eli vaakasuoran kanssa muodostama kulma ja vähentämällä ne toisistaan. Tähän tarvitsemme trigonometriaa.

Olkoon janan AB ja x – akselin eli vaakasuoran välinen kulma α ja janan AC ja x – akselin välinen kulma β.

Koska janan AC suorakulmaisen kolmion pystysuoran kateetin pituus on 1 ja vaakasuoran kateetin pituus on 7, saamme

$$tan\,\beta = \frac{1}{7} \approx 0{,}143,$$

josta $\beta \approx 8{,}1°$.

Kulman α laskemiseksi tarkastellaan seuraavalla tavalla määriteltyä suorakulmaista kolmiota. Sen hypotenuusa on jana AB ja pystysuora kateetti on pystysuora jana, jonka toinen päätepiste on B:ssä ja toinen AC:n suorakulmaisen kolmion vaakasuoralla kateetilla. Sen pituus on 4. Piirsin sen mustalla katkoviivalla.

Vaakasuora kateetti on jana, jonka päätepisteet ovat piste A ja sekä pystysuoran kateetin ja AC:n janan leikkauspiste. Tästä saadaan

$$tan\,\alpha = \frac{4}{1},$$

josta $\alpha \approx 76°$. Kysytty kulma on $\alpha - \beta \approx 67{,}9°$. **Muista**, että jos mittaat kysytyn kulman minun piirroksestani, saat aivan väärän tuloksen, koska x:n ja y:n mittakaavat eivät ole samat. Laskemalla saadaan oikea tulos.

<u>Vastaus</u>: Kysytty kolmion ala on 13 pinta-alan yksikköä ja kysytty kulman suuruus on 67,9 astetta.

Esimerkki 4

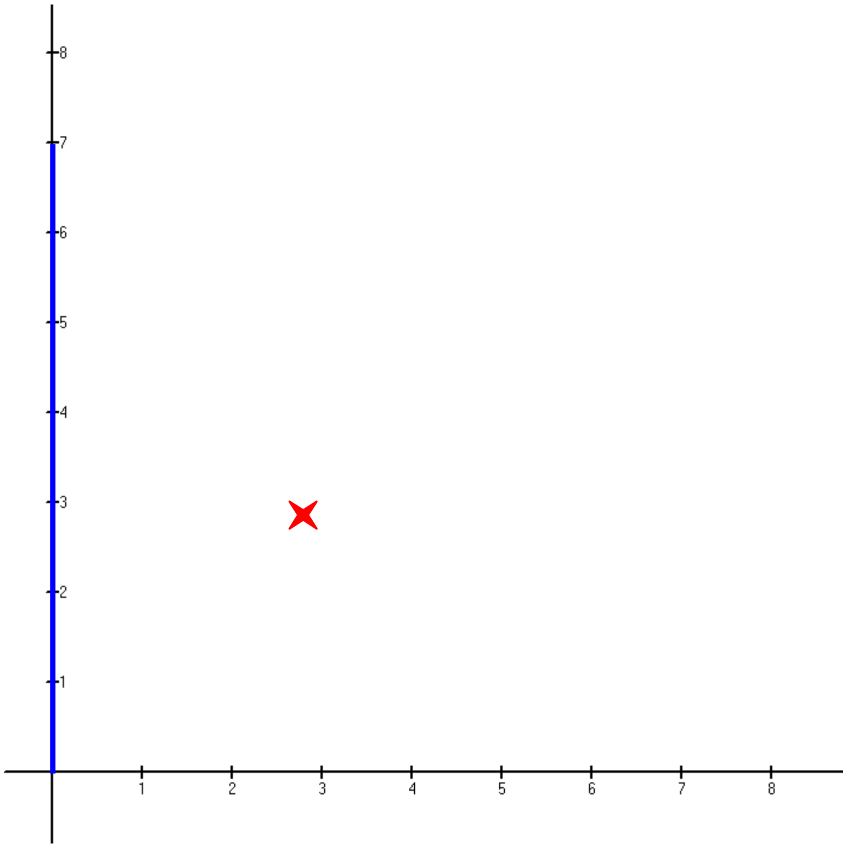
Kolmion mitat ovat 7,0 ruutua, 5,0 ruutua ja 4,0 ruutua. Laske kolmion pinta-ala.

Ratkaisu

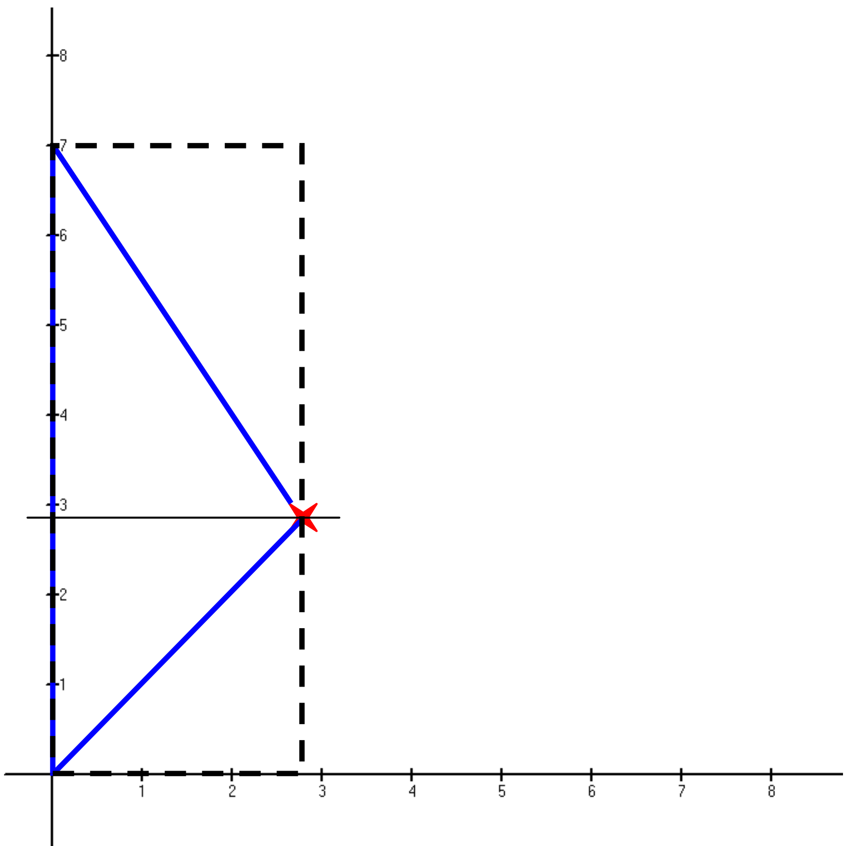
Piirretään annettu kolmio koordinaatistoon. Valitaan mittakaava niin, että yksi ruutu paperilla vastaa yhtä yksikköä näytöllä. Piirretään 7 ruudun eli 7 yksikön pituinen sivu pystysuoraan alkaen origosta.

Paperilla kuva kannattaa ehdottomasti piirtää geometrisesti. Jatka nyt niin, että otat ensin harpin kärkien väliin 5 ruutua ja piirrät sillä ”riittävän” pitkän ympyränkaaren osan äskeisen pystysuoran janan toinen loppupiste keskipisteenä ja sitten toisen ”riittävän” pitkän ympyränkaaren osan pystysuoran janan toinen loppupiste keskipisteenä. Kolmion kolmas piste on siinä, missä nämä kaksi kaarta leikkaavat. Leikkauspisteitä on kaksi; valinta on sinun.

Mikä on ”riittävän” pitkä ympyränkaaren osa määräytyy sillä perusteella, että kaarten täytyy leikata. Kuvan punainen tähti on kaarten (toisessa) leikkauspisteessä.



Täydennän piirrostani vielä niin, että lisään mukaan kolmion piirin sekä suorakulmion, jota käytän jälleen kolmion pinta-alan laskemisessa.



Arvioidaan kuvasta suorakulmion mitat ja punaisen tähden koordinaatit; ne ovat sama asia.

Arvio:

- Nelikulmion korkeus = 7,0 ruutua.
- Nelikulmion leveys = 2,8 ruutua = punaisen tähden x - koordinaatti
- Punaisen tähden y – koordinaatti = 2,9 ruutua = kolmion korkeus (tähtäysapuna on ohut vaakaviiva)

Tarkkuutta voit nyt tutkia kahdellakin eri tavalla.

1. Laskemalla kolmion ala sen korkeuden ja kannan avulla sekä **esimerkin 3** menetelmällä ja vertaamalla näitä keskenään.
2. Laskemalla piirroksen kahden suorakulmaisen kolmion hypotenuusien pituudet ja vertaamalla näitä annettuihin lukuihin.

Mitä muutat, jos eroja on? Kuinka pieni ero on vielä merkitsevä?

Jatkan nyt käyttämällä vain jälkimmäistä arvioita. Tee sinä molemmat.

- Mitatuista luvuista laskettu pitemmän hypotenuusan pituus ruutuina = $\sqrt{4{,}1^2 + 2{,}8^2} \approx 5{,}0$.
- Mitatuista luvuista laskettu lyhyemmän hypotenuusan pituus ruutuina = $\sqrt{2{,}9^2 + 2{,}8^2} \approx 4{,}0$.

Saadut tulokset täsmäävät annettujen lukujen kanssa annettujen tarkkuuksien puitteissa. Toisin sanoen, kun laskujen tulokset pyöristetään siihen tarkkuuteen, jota annetuissa luvuissa käytettiin, saadaan nuo annetut luvut.

Toisaalta, jos esimerkiksi lyhyemmän hypotenuusan pituudeksi olisi saatu vaikkapa 4,1, olisi mittauksia pitänyt tarkistaa.

Lasketaan kysytty kolmion ala.

$$\text{Kolmion ala} = 2{,}8 \cdot 7{,}0 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}9 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 \cdot 4{,}1 = 9{,}8.$$

Vastaus: Kolmion ala on 9,8 ruutua.

On olemassa graafisia laskimia ja tietokoneohjelmistoja, joiden avulla tuollaiset ja monimutkaisemmatkin pinta-alat ja muut mitat selviävät käden käänteessä. Kaikki eivät kuitenkaan voi tai halua ostaa sellaista laskinta tai tietokoneohjelmistoa, mutta haluavat silti tarkkoja tuloksia — tai vain harjoitella myös käytännöllistä geometriaa!

Esimerkki 5

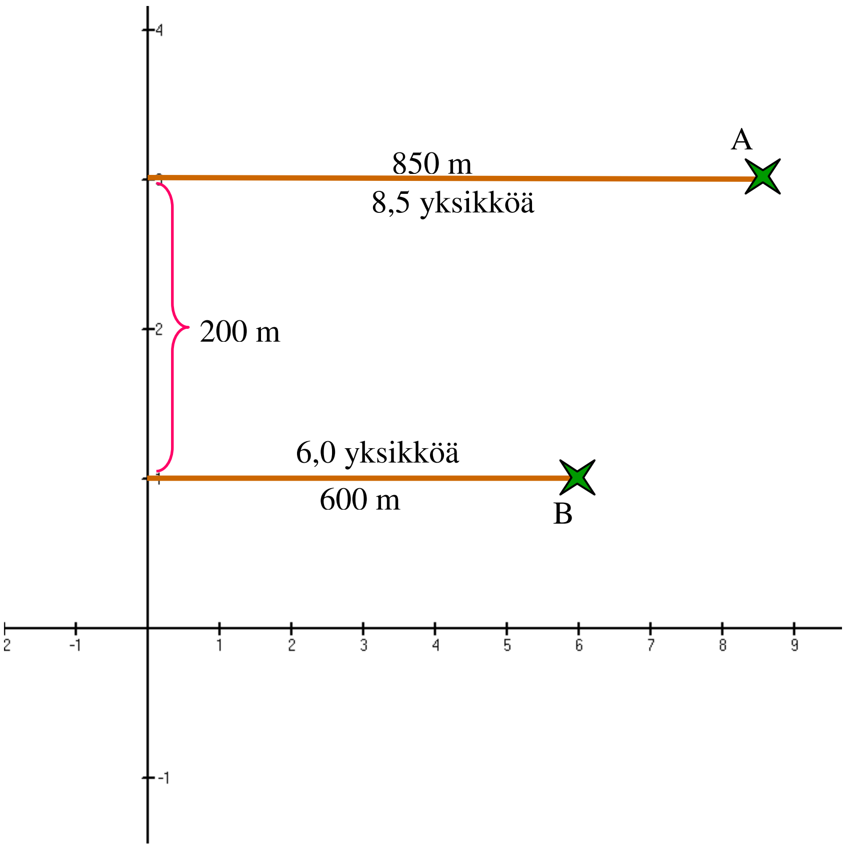
Kolmion mitat ovat 135,2 mm, 119,0 mm ja 49,50 mm. Laske kolmion pinta-ala.

Ratkaisu

Jos paperin ruutujen koko on $7mm \cdot 7mm$, kolmion mitat ovat 19,31 ruutua, 17,00 ruutua ja 7,071 ruutua. Tee laskut loppuun **esimerkin 4** tapaan, mutta huomaa, että annetut mitat ovat tarkemmat kuin mitä kuvaan voit piirtää tai siitä lukea.

Esimerkki 6

Kaverukset asuvat kahden eri sivutien varrella. Molemmat sivutiet ovat kohtisuorassa päätietä vastaan. Toinen kavereista asuu 600 metrin päässä päätiestä ja toinen toisen sivutien varrella, samaan suuntaan päätiestä, 850 metrin päässä siitä. Sivutiet ovat 200 metrin päässä toisistaan. Kuinka kaukana kaverukset asuvat toisistaan?



Ratkaisu

Valitaan kuvan mittakaava niin, että yksi yksikkö kuvassa vastaa 100 metriä todellisuudessa.

Huomaa, että pisteitten tai asuntojen keskinäiseen etäisyyteen ei vaikuta, missä kohdassa tai kuinka päin koordinaatisto sattuu niihin nähden olemaan.

Huomaa myös, että jälleen y – akselin yksikkö pitempi kuin x – akselin yksikkö.

Merkitään kaverusten asuntojen paikkoja kirjaimilla A ja B.

Tehtävämme on laskea pisteiden A ja B etäisyys. Kuvan mukaiset asuntojen koordinaatit ovat

A = (8,5;3)

B =(6;1).

Näin piirroksen koordinaatiston mittakaavassa asuntojen etäisyys on $\sqrt{(8{,}5-6)^2+(3-1)^2} \approx 3{,}2$. Koska yksi piirroksen yksikkö vastaa 100 metriä todellisuudessa, on kaverusten asuntojen välimatka luonnossa 320 metriä.

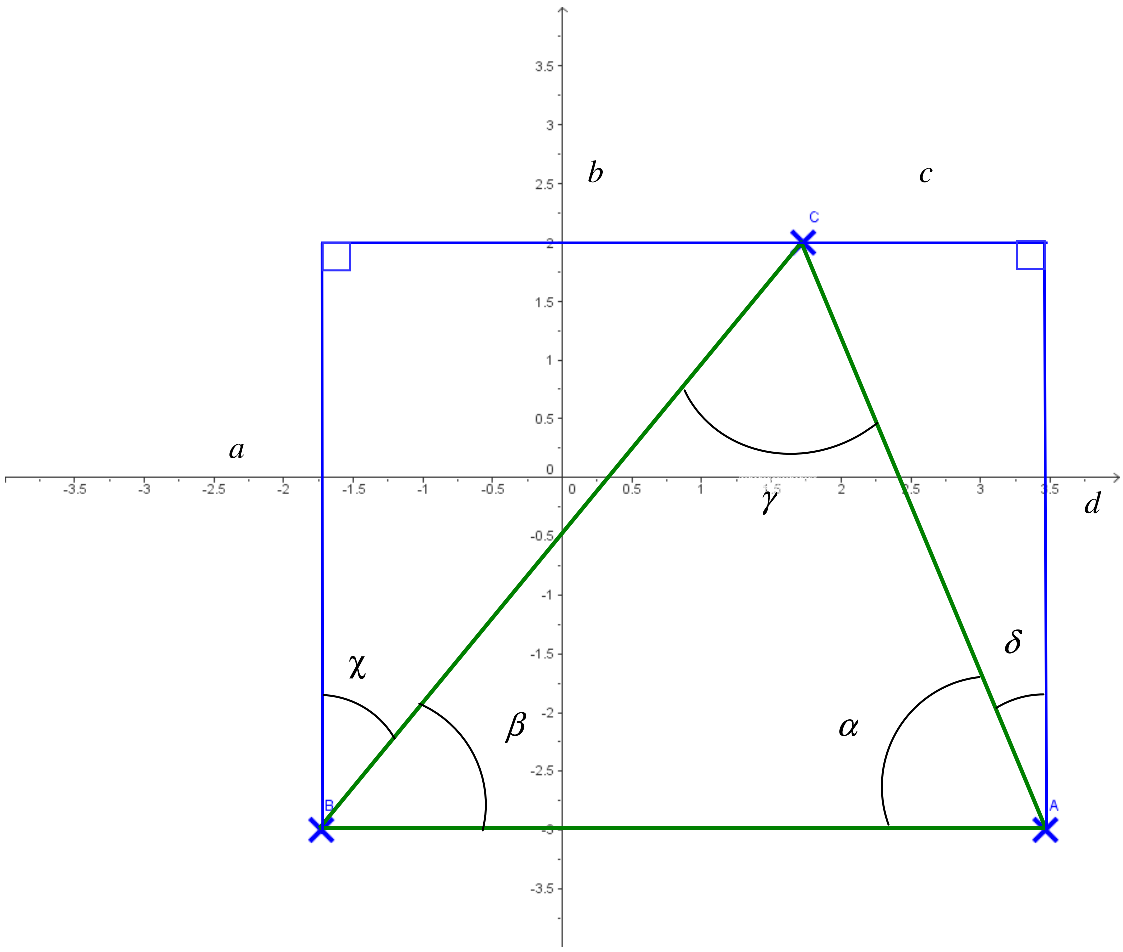
<u>Vastaus</u>: Kaverukset asuvat noin 320 metrin etäisyydellä toisistaan.

Esimerkki 7

Kolmion kärjet ovat pisteissä A = $\left(2\sqrt{3},-3\right)$, B = $\left(-\sqrt{3},-3\right)$ ja C = $\left(\sqrt{3},2\right)$. Laske kolmion kulmien suuruudet yhden asteen tarkkuudella.

Ratkaisu

Kuvan kaksi sinistä suoraa kulmaa ovat apupiirroksia. Määrittelen tämän kuvan avulla tavalliseen tapaan myös viisi kulmaa sekä neljä janaa, jotka tarvitaan myöhemmin.



Koska pisteillä A ja B on sama y – koordinaatti, niin jana AB on vaakasuorassa. Täten kulma

$$\beta = 90° - \chi .$$

Mistä sitten saadaan χ? Se saadaan tangentti-funktion määritelmän avulla. Siis

$$\tan \chi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)}{2 - (-3)} = \frac{2\sqrt{3}}{5} .$$

Tämän osamäärän osoittaja on pisteiden C ja B x – koordinaattien erotus ja nimittäjä samojen pisteiden y – koordinaattien erotus.

Laskimen avulla saadaan, että $\beta \approx 55{,}2850°$.

Vastaavasti saadaan myös, että

$$tan\,\delta = \frac{c}{d} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2 - (-3)} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

ja koska

$$\alpha = 90° - \delta,$$

niin laskimen avulla saadaan taas, että $\alpha \approx 70{,}8934°$.

Koska kolmion kulmien summa on 180 astetta, niin $\gamma = 53{,}8216°$.

<u>Vastaus</u>: Kolmion kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella ovat $\begin{cases} \alpha = 71° \\ \beta = 55° \\ \gamma = 54° \end{cases}$.