Aluksi

Tämän luvun aiheina ovat yhdenmuotoisuus sekä yhdenmuotoisuussuhde. Kaikkein tavallisimmat yhdenmuotoisuuden sovellukset ovat varmasti kartta ja pohjapiirros. Aloitamme tutuista geometrisista kuvioista — lähes pelkästään kolmioista — ja tarkastelemme yhdenmuotoisuutta niitten avulla. Näistä etenemme yhdenmuotoisuussuhteeseen ja sen avulla pohjapiirroksen ja kartan *mittakaavaan*.

Tasokuvioitten yhdenmuotoisuudesta

Yhdenmuotoisuus tarkoittaa juuri sitä, miltä kuulostaakin. Esimerkiksi kaikki neliöt keskenään ja ympyrät keskenään ovat yhdenmuotoiset, vaikka voivat olla eri kokoiset. Vastaavasti kartta on yhdenmuotoinen maiseman kanssa, jota se esittää. Näin ainakin, jos maisemaa katsotaan suoraan ylhäältä.

Tarkastellaan neliötä, jonka sivun pituus on yksi metri. Silloinhan sen pinta-ala on $1m \cdot 1m = 1m^2$ eli *yksi neliömetri* tai tuttavallisesti vain *yksi neliö*. Otetaan sitten toinen neliö. Olkoon sen sivunpituus 3 metriä. Tämän neliön ala on $3m \cdot 3m = 9m^2$. Kun kolminkertaistimme neliön sivut, sen ala yhdeksänkertaistui.

Jos siis esimerkiksi kolminkertaistamme neliön sivun eli korvaamme *s:n* kolmella *s:llä*, kuvion ala muuttuu s^2:sta $(3s)^2 = 9s^2$:ksi, joka on yhdeksän kertaa alkuperäinen ala s^2. Yleisesti on voimassa, että kun kahden kuvion vastaavien janojen pituuksien suhde on a, niin kuvioitten alojen suhde on a^2. Tästä on kysymys, kun tämän luvun myöhemmissä vaiheissa näytän, että *alojen suhde on mittakaavan yhdenmuotoisuussuhteen neliö*. Kun olet lukenut luvun kokonaan, voit palata takaisin näille riveille ja todeta, että sinähän ymmärrät tuon kursivoidun väitteen!

Yhdenmuotoisuudesta

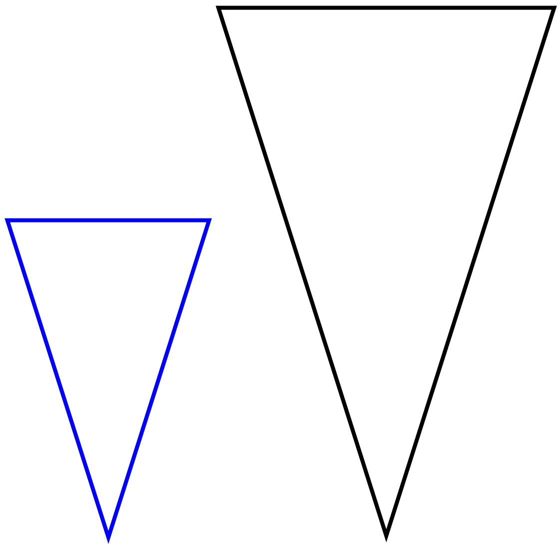
Yhdenmuotoisuutta voi luonnehtia esimerkiksi sanomalla, että *yhdenmuotoisten kuvioitten* <u>*muodot*</u> *ovat toistensa kopiot*. Tämä luonnehdinta ei sano mitään kuvioitten koista. Asetetaan yhdenmuotoisuudelle seuraava määritelmä, joka on sopusoinnussa äskeisen muotoilun kanssa.

Kaksi tasokuviota ovat *yhdenmuotoiset* tarkalleen silloin, kun
- niitten vastinsivujen suhde on sama
- niitten vastinkulmat ovat yhtä suuret

Jälkimmäinen näistä ehdoista tarvitaan lähinnä ympyrän takia. Ovathan kaikki ympyrät keskenään yhdenmuotoiset. Muuten nuo ehdot seuraavat toisistaan.

Esimerkki 1

Olkoon meillä kaksi eri kokoista karamellitötteröä, joiden vaakasuora poikkileikkaus on ympyrä. Tötteröt ovat yhdenmuotoiset ja pienemmän tötterön korkeus on 60% isomman tötterön korkeudesta. Laske isomman tötterön suun halkaisija, kun pienemmän tötterön suun halkaisija on 12 cm.



Ratkaisu

Tästä kolmiulotteisesta tapauksesta tehdään kaksiulotteinen tarkastelemalla tötteröitten pystysuoraa poikkileikkausta.

Merkitään pienempää halkaisijaa *d:llä* ja isompaa *D:llä*. Koska poikkileikkaukset ovat yhdenmuotoiset ja

$$d = 0{,}6 \cdot D,$$

niin

$$12cm = 0{,}6 \cdot D,$$

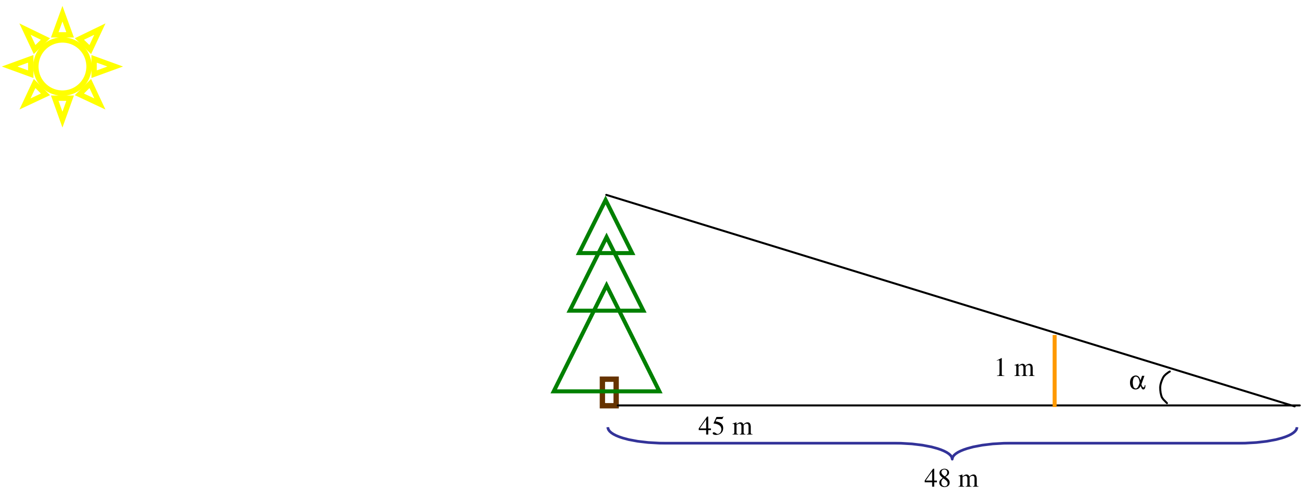
joten

$$\begin{aligned} D &= \frac{12cm}{0{,}6} \\ &= 20cm \end{aligned}$$

<u>Vastaus</u>: Isomman tötterön suun halkaisija on 20 cm.

Esimerkki 2

Aurinko heittää puusta varjon tasaiselle, vaakasuoralle kentälle. Huomaat, että kun asetat metrin mittaisen kepin pystyyn puun varjoon 45 metrin päähän puun juurelta, niin kepin varjon kärki osuu tarkasti puun varjon kärkeen. Puun ylimmän latvan varjo päättyy 48 metrin päässä puun juurelta. Kuinka korkea puu on? [Sanotko, että ei varjossa ole varjoa? Olet oikeassa, mutta homma hoituu kyllä!]



Ratkaisu

Koska keppi on 45 metrin päässä puun juurelta, niin se on 3 metrin päässä puun varjon kärjestä.

Kuviossa on kaksi suorakulmaista kolmiota. Toisen kateetit ovat puu ja 48 metriä pitkä jana ja toisen kateetit ovat kolme metriä pitkä jana — matka kepistä varjon kärkeen — ja metrin mittainen keppi. Koska kulma α on molemmille kolmioille yhteinen ja koska molemmat kolmiot ovat suorakulmaiset, niin molempien kolmas kulma tiedetään ja se on molemmissa kolmiossa sama eli $180° - \alpha$. Kolmioitten kulmat ovat siis samat. Tästä seuraa, että mainitut suorakulmaiset kolmiot ovat <u>yhdenmuotoiset</u>. Merkitään puun korkeutta *x:llä*. Ison kolmion *x:n* pituista kateettia vastaa pienen kolmion metrin mittainen kateetti ja ison kolmion 48 metrin mittaista kateettia vastaa pienemmän kolmen metrin mittainen kateetti. Koska yhdenmuotoisten kuvioitten vastinsivujen pituuksien suhde on sama, saadaan yhtälö

$$\frac{x}{1m} = \frac{48m}{3m}$$

eli

$$x = 16m\,.$$

Puun korkeus on siis 16 metriä.

<u>Vastaus</u>: Puu on 16 metriä korkea.

Kolmion kulmien summa on 180º, joten, jos kolmion kulmista tiedetään kaksi, kolmas voidaan laskea. Tätä tietoa voi käyttää hyväksi yhdenmuotoisten kolmioitten yhteydessä seuraavalla tavalla. Jos tiedetään, että kahdella kolmiolla on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin myös kolmannet kulmat ovat yhtä suuret. Tästä puolestaan seuraa, että nämä kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska tasokuviot ovat yhdenmuotoiset, jos niitten vastinkulmat ovat samat. Tätä tulosta sanotaan *kk-lauseeksi*.

Jos kahdella kolmiolla on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (*kk-lause*)

Esimerkki 3

Suorakulmaisen kolmion sisään on piirretty neliö, jonka kaksi, toisiaan vastaan kohtisuoraa sivua ovat kolmion kateeteilla ja yksi kärki kolmion hypotenuusalla. Osoita, että näin syntyvät kaksi uutta kolmiota ovat yhdenmuotoiset.

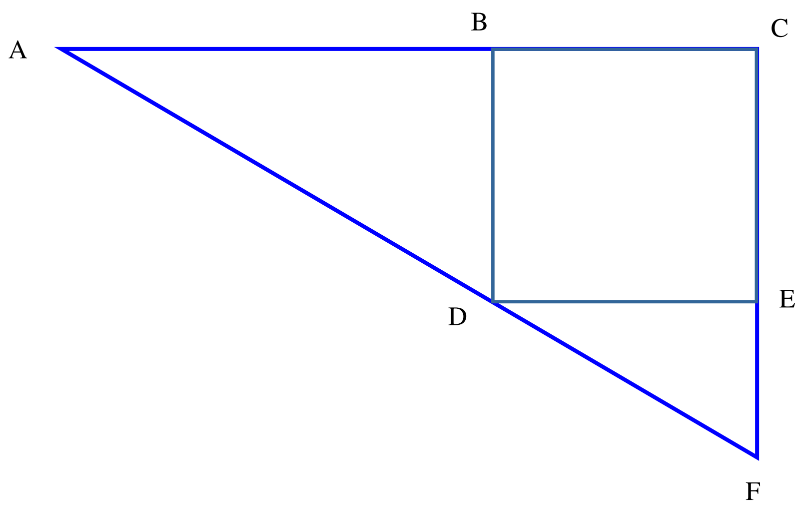
Ratkaisu

Piirretään kuva. Tehtävänä on siis osoittaa, että kolmiot ABD ja DEF ovat yhdenmuotoiset.

Koska janat AC ja DE ovat yhdensuuntaiset keskenään ja janat CF ja BD keskenään, niin kulmat ABD ja DEF ovat samat; molemmat ovat suoria kulmia.

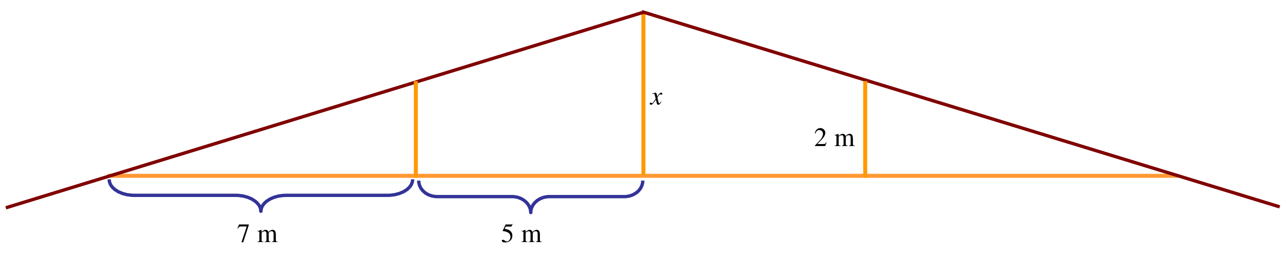
Koska janat AD ja DF ovat saman janan — janan AF — osia ja janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset, niin kulmat DAB ja FDE ovat samat.

Koska nyt on osoitettu, että kolmioilla ABD ja DEF on kaksi yhtä suurta kulmaa, ne ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.



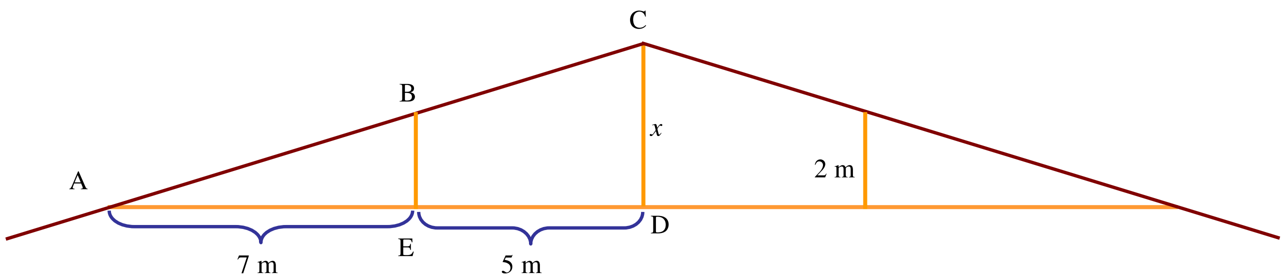
Esimerkki 4

Oheinen piirros esittää rakennuksen kattoa ja sen tukirakenteita. Katon lappeet ovat identtiset. Tarvittavat mitat annan kuvassa. Lasketaan *x:n* pituus.



Ratkaisu

Otan kuvasta uuden kopion ja teen merkinnät tähän kopioon. Aloitan nimeämällä tarvittavat pisteet.



Osoitetaan nyt, että kolmiot ACD ja ABE ovat yhdenmuotoiset.

Kulma DAC on molemmille kolmioille yhteinen. Kulma BEA = 90º ja kulma CDA = 90º, joten BEA = CDA. Koska näillä kolmioilla on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin ne ovat yhdenmuotoiset (kk-lause).

Koska kolmiot siis ovat yhdenmuotoiset, voimme käyttää hyväksi sivujen suhteita. Koska lisäksi lappeet ovat identtiset, saamme yhtälön

$$\frac{x}{AD} = \frac{BE}{AE}$$

eli

$$\frac{x}{12m} = \frac{2m}{7m},$$

josta

$$x = 3{,}4m.$$

<u>Vastaus</u>: Kysytty pituus on noin 3,4 metriä.

Yhtenevyydestä

Yhtenevien kuvioitten mitat ovat toistensa kopiot. <u>Yhtenevyys on yhdenmuotoisuuden erikoistapaus</u>. Onhan selvää, että yhtenevät kuviot ovat myös yhdenmuotoiset.

Lyhyesti sanottuna, tasokuvioitten *yhtenevyys* tarkoittaa sitä, että kuviot ovat samanmuotoiset ja yhtä suuret. Tällöin kuvioitten ääriviivat osuvat tarkalleen toisiinsa, jos yhtenevät kuviot asetetaan päällekkäin. Jos yhtenevyys halutaan määritellä tarkasti, täytyy yhdenmuotoisuuden määritelmään lisätä yksi rajoitus. Seuraavassa määritelmässä tämä seikka on otettu huomioon ensimmäisessä ehdossa:

Kaksi tasokuviota ovat *yhtenevät* tarkalleen silloin, kun

- niitten vastinsivujen suhde on yksi
- niitten vastinkulmat ovat yhtä suuret

Nyt ensimmäinen ehto sanoo vain sen, että kaikki vastinsivut ovat yhtä pitkät vertailtavan sivun kanssa, siis että sivut ovat samat. Kun vastinkulmatkin ovat samat, ovat kuviot toistensa kopiot.

Paluu Pythagoraan lauseeseen

Pythagoraan lause voidaan todistaa monella eri tavalla. Esittelen nyt erään. Tämä todistus perustuu kolmioitten yhdenmuotoisuusominaisuuksiin. Vaikka taito todistaa Pythagoraan lause ei kuulu tämän kurssin vaatimuksiin, niin lue tarkasti!

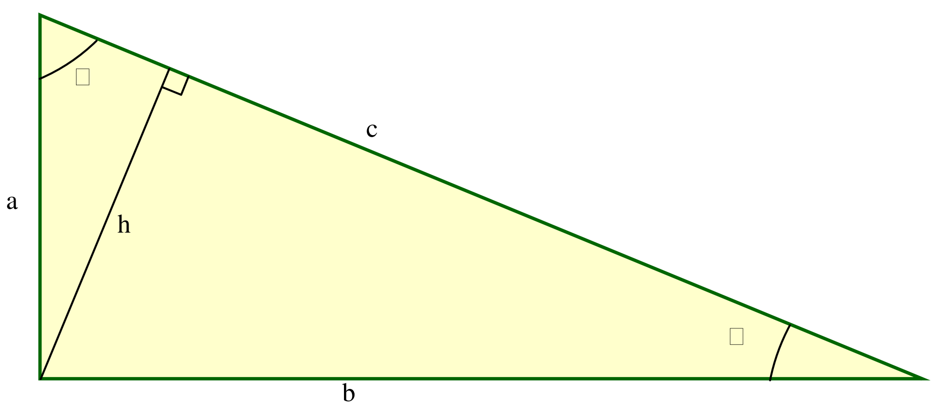
Olkoon meillä jokin suorakulmainen kolmio.

Piirrän tähän kuvan, joka on tietysti tarkalleen eräs erikoistapaus. Ajatellaan kuitenkin, että kuvan suorakulmainen kolmio edustaa kaikkia suorakulmaisia kolmioita. Jos huomaamme sillä jonkin yksilöllisen ominaisuuden — kuten sen, että sen kulmat ovat tarkalleen jonkin kokoiset — niin sivuutamme tuon ominaisuuden välittömästi. Emme koskaan ajattele tuota yksilöllistä piirrettä, kaikkein vähiten vetoamme siihen.

Noudatan yleistä käytäntöä ja annan hypotenuusalle nimen c ja kateeteille nimet a ja b. Yleistä käytäntöä edelleen noudattaen, kutsun kateetin a vastaista kulmaa α:ksi ja kateetin b vastaista kulmaa β:ksi.

Verrataan kolmioita keskenään. Merkitään pienemmän kolmion alaa kirjaimella A_1, keskimmäisen kolmion alaa kirjaimella A_2 ja isoa kolmiota kirjaimella A. Tällöin siis $A_1 + A_2 = A$. Piirrän kolmiolle vielä korkeusjanan hypotenuusaa vastaan. Annan sille nimen h, vaikka laskuissa emme korkeusjanan nimeä tarvitse.

Kulma β (muista yllä oleva toteamus) on sekä pienessä että suuressa kolmiossa ja kulma α on sekä



keskimmäisessä että suuressa kolmiossa. Kaikki kolme ovat myös suorakulmaisia kolmioita. Kahden pienemmän kolmion kaksi kulmaa tiedetään siis samoiksi kuin ison kolmion vastinkulmat, joten myös kolmas on sama. Tällöin ne ovat yhdenmuotoiset suurimman kolmion kanssa ja siis myös keskenään.

Hypotenuusien neliöitten suhde on myös niitten neliöitten alojen suhde, jonka sivuna hypotenuusa on. Täten ison ja pienen kolmion alojen suhde $\frac{A}{A_1}$ on $\frac{c^2}{a^2}$ ja ison kolmion ja keskimmäisen kolmion alojen suhde $\frac{A}{A_2}$ on $\frac{c^2}{b^2}$ eli hypotenuusien neliöitten suhde. Koska siis $\frac{A}{A_1} = \frac{c^2}{a^2}$ ja $\frac{A}{A_2} = \frac{c^2}{b^2}$, niin

$$\frac{A}{A_1} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow A_1 = \frac{a^2}{c^2}A$$
$$\frac{A}{A_2} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow A_2 = \frac{b^2}{c^2}A$$

ja

$$A = A_1 + A_2 = \frac{a^2}{c^2}A + \frac{b^2}{c^2}A.$$

Kun nyt jaetaan A:lla, niin saadaan:

$$A = \frac{a^2}{c^2}A + \frac{b^2}{c^2}A \,\Big|\cdot \frac{1}{A} \Rightarrow 1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}.$$

A:lla jakaminenhan on sama asia kuin sen käänteisluvulla kertominen.

Kerrotaan vielä termillä c^2, niin saamme tuloksen

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \,\Big|\cdot c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Siis Pythagoraan lause.

Yhdenmuotoisuussuhteesta

Yhdenmuotoisuussuhde on sama kuin *mittakaava* ja sama kuin kuvioitten vastinjanojen suhde. Vastinjanojen suhde eli mittakaava esitetään kokonaislukujen suhteena mikäli mahdollista. Tällöin voidaan päätyä sellaisiin ilmaisuihin kuin 2 : 3 tai 1 : 200 000. Mittakaavan symbolina käytetään usein kirjainta *k* tai kirjainparia *mk*.

Mittakaava on kuvan janojen pituuksien ja todellisten janojen pituuksien suhde.

Mitä sitten tarkoittaa, että esimerkiksi asuinrakennuksen pohjapiirroksen mittakaava on vaikkapa 1 **:** 70? Se tarkoittaa sitä, että jokainen sentti piirroksessa on 70 cm luonnossa. Se tarkoittaa myös sitä, että jokainen metri luonnossa on $\frac{100cm}{70}$ kartalla. Vielä se tarkoittaa sitäkin, että piirroksen pituusmitan ja rakennuksen vastaavan pituusmitan, jota piirros esittää, suhde on $\frac{1}{70}$. Siinä kaikki.

Mitä sitten tarkoittaa 2 : 3? Se tarkoittaa, että 2 metriä piirroksessa on 3 metriä luonnossa. Jos kartan mittakaava eli yhdenmuotoisuussuhde on 1 : 200 000, niin 3 cm kartalla on

$$200000 \cdot 3cm = 600000cm = 6km$$

luonnossa.

Huomaa merkintä! Mittakaava annetaan yleensä muodossa ***k = 1 : n***, missä *n* on luonnollinen luku. Jos mittakaava on tätä muotoa, missä kaksoispisteen edellä eli osoittajassa oleva numero on ykkönen, voimme ajatella, että käytännön laskuissa nappaamme vain tuon kaksoispisteen oikealla puolella olevan luvun talteen ja suoritamme laskut sillä.

On kuitenkin tilanteita, joissa mittakaava ilmoitetaan muodossa ***k = m : n***. Nyt siis *m* ei välttämättä ole ykkönen. Aina *m* ja *n* ovat kuitenkin luonnollisia lukuja.

Huomaa vielä, että lukujen järjestys on tärkeä. Ensimmäinen luku tarkoittaa mittaa piirroksessa ja kaksoispisteen jälkeinen luku on vastaava luku luonnossa. Esimerkiksi merkintä ***k = 100 : 1*** tarkoittaa, että sata milliä kuvassa on yksi luonnossa tai että 10 cm kuvassa on 1 mm luonnossa. Tällainen kuva on siis suurennus! Esimerkiksi mikropiirien suunnittelukuvat ovat suurennuksia.

Esimerkki 5

Asunnonostaja tutkii pohjapiirrosta, jonka mittakaava eli yhdenmuotoisuussuhde on 1 : 50. Hän mittaa kuvasta olohuoneen leveyden ja toteaa, että se on 9 cm. Mikä on oikean olohuoneen leveys?

Ratkaisu

Ratkaistaan tämä tehtävä kolmella tavalla.

1. tapa

Mittakaava sanoo siis, että jokainen piirroksen sentti (tai milli tai kilometri tai … valovuosi! Onko pohjapiirroksissa valovuosia? Mutta jos on niin … luonnossa on sitten 50 valovuotta) on 50 senttiä luonnossa. Täten olohuoneen pituus todellisuudessa on $50 \cdot 9cm = 4{,}5m$.

Vastaus: Oikean olohuoneen leveys on 4,5 metriä.

2. tapa
Käytetään hyväksi tietoja, joita meillä on yhdenmuotoisista kuvioista. Yhdenmuotoisten kuvioitten vastinosien suhde on sama kuin yhdenmuotoisuussuhde — kaavioissa mittakaava. Joten

$$\frac{9}{x} = \frac{1}{50},$$

josta esimerkiksi ristiin kertomalla saadaan ensin

$$9 \cdot 50 = 1 \cdot x$$

ja siis $x = 450$.

Vastaus: Oikean olohuoneen leveys on 4,5 metriä.

3. tapa
Tehdään verranto.

Pituus pohjapiirroksessa (cm)	Pituus todellisuudessa (cm)
1	50
9	x

Oheisen taulukon mukaan saadaan verrannollisuusyhtälö:

$$\frac{1}{9} = \frac{50}{x},$$

josta

$$x = 50 \cdot 9 = 450.$$

Vastaus: Oikean olohuoneen leveys on 4,5 metriä.

Esimerkki 6

Esimerkin 5 asunnonostaja jatkaa pohjapiirroksen tutkimista. Sen mittakaavahan oli 1 : 50. Hän aloitti mittaamalla kuvasta olohuoneen leveyden ja totesi, että se on 9 cm. Nyt hän mittaa vielä olohuoneen pituuden. Se on 11cm. Mikä on oikean olohuoneen pinta-ala? Oletamme, että se on suorakulmion muotoinen.

Ratkaisu

Asunnonostaja laskee jollakin **Esimerkin 5** tavoista olohuoneen pituuden luonnossa ja saa tuloksen 5,5 metriä. Kun olohuoneen pituus on 5,5 metriä ja leveys 4,5 metriä, niin alaksi saadaan $24{,}75m^2$.

<u>Vastaus</u>: Olohuoneen pinta-ala on 24,75 m^2.

Katsotaan **Esimerkkiä 6** vielä uudestaan, tarkemmin. Olohuoneen pinta-ala saatiin lausekkeesta $4{,}5m \cdot 5{,}5m$. Kirjoitetaan tämä nyt siihen muotoon, mitä kautta se itse asiassa saatiin. Toisin sanoen, kirjoitetaan alan lauseke mittakaavan ja pohjapiirroksen mittojen avulla:

$$4{,}5m \cdot 5{,}5m = \underbrace{50 \cdot 9cm}_{=\text{ mittakaava} \cdot \text{leveys piirroksessa}} \cdot \overbrace{50 \cdot 11cm}^{=\text{ mittakaava} \cdot \text{pituus piirroksessa}} = 50^2 \cdot 9 \cdot 11cm^2$$

Yhtälön viimeisen yhtäsuuruusmerkin jälkeinen lauseke alkaa <u>mittakaavan neliöllä</u> eli termillä 50^2. Viimeinen tulo eli $9 \cdot 11cm^2$ on <u>olohuoneen pinta-ala kartalla</u>.

Yleistän tämän huomion nyt.

Yhdenmuotoisten tasokuvioitten alojen suhde on mittakaavan neliö

Tähän kohtaan viittasin tämän luvun 1. näytöllä!

Esimerkki 7

Huoneen leveys on 5 metriä ja pituus on 6 metriä. Laske huoneen pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on 1 **:** 70.

Ratkaisu

Huoneen mitoista lasketaan pinta-ala, joka on $30m^2$. Koska yhdenmuotoisten kuvioitten alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen neliö, saadaan huoneen pinta-alaksi A_k kartalla

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{30m^2}{70^2} \\ &= 61cm^2 \end{aligned}$$

Vastaus: Huoneen ala on kartalla noin 61 cm^2.

Esimerkki 8

Huoneen pituus kartalla on 13 senttiä ja leveys 8 senttiä ja sen pinta-ala luonnossa on $26\,m^2$. Laske kartan mittakaava.

Ratkaisu

Koska yhdenmuotoisten kuvioitten alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen *k* neliö, saadaan yhtälö

$$k^2 = \frac{26m^2}{13cm \cdot 8cm} = 25000,$$

josta saadaan mittakaava

$$k = 50.$$

Vastaus: Kartan mittakaava on 1 : 50.

Keskeisiä käsitteitä