Aluksi

Tässä luvussa emme tyydy enää pelkkään tasoon. Aiheena ovat nyt *avaruuskappaleet* eli *kolmiulotteiset kappaleet*. Tarkastelemme lieriötä eli sylinteriä, kartiota, särmiötä, pyramidia ja palloa. Päähuomiomme kiinnitämme näitten kappaleitten tilavuuteen ja vaipan pinta-alaan sekä joihinkin olioihin, jotka rajoittavat näitä kappaleita. Tällaisia ovat esimerkiksi särmä ja sivujana.

Avaruuskappaleista

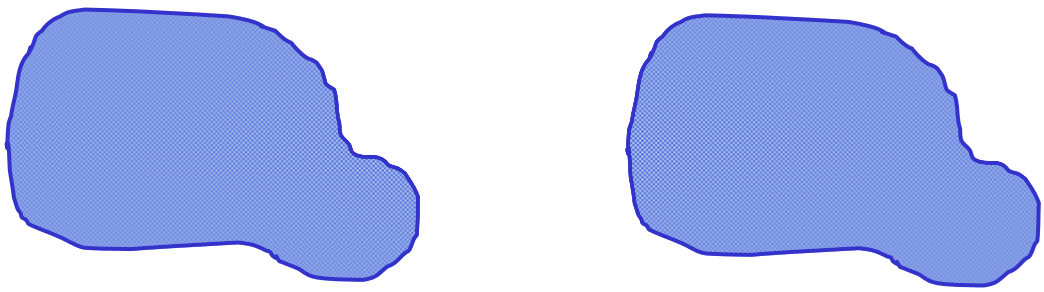
Avaruuskappaleilla on aina myös tilavuus toisin kuin tasokuvioilla. Tilavuus ilmaistaan tilavuusmitoilla tai vetomitoilla. Vetomittoja, jotka esittelin MAB2:n toisen luvun lopulla, ovat millilitra, senttilitra, desilitra, litra, hehtolitra ja niin edelleen. Ne voidaan aina muuntaa tilavuusmitoiksi, koska vetomitat ja tilavuusmitat kuvaavat samaa asiaa.

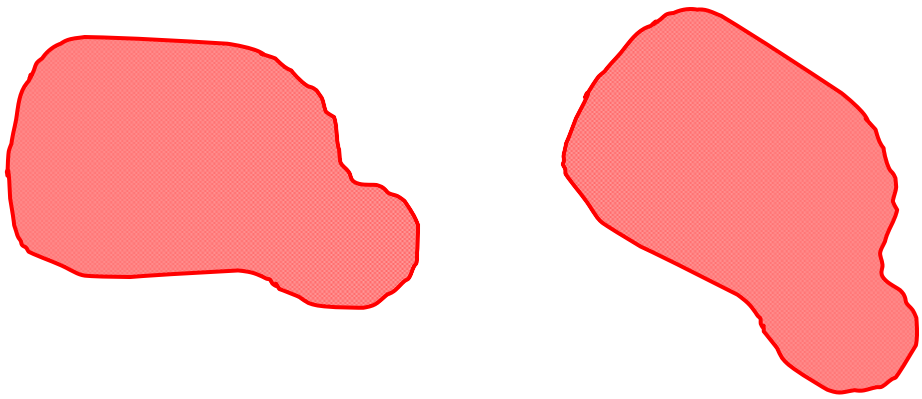
Koska kappaleen tilavuus ilmaistaan tilavuusmitoissa, tilavuuden yksiköissä on aina pituusmitan kuutio. Esimerkiksi 162 litraa on sama asia kuin 162 dm^3 .

Lieriö

Lieriötä rajoittavat *vaippa* sekä kaksi toistensa kanssa samanlaista ja yhdensuuntaista *pohjaa*. Vaippa liittää pohjat toisiinsa. Vaippa voi olla mikä tahansa suljettu, yhtenäinen tasokuvio.

Yhdensuuntaisuuteen liitetään tässä yhteydessä myös ”samaan suuntaan osoittaminen”. Oheisissa

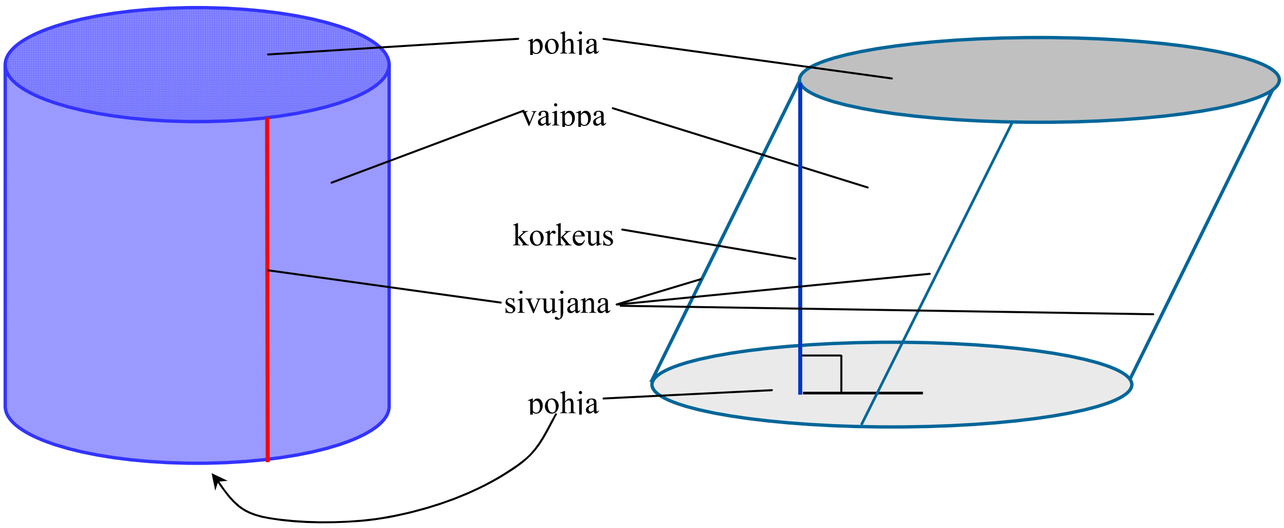




kahdessa kuvaparissa ensimmäisen parin osapuolet osoittavat samaan suuntaan, jälkimmäisen eivät.

Lieriöllä on myös *sivujana* ja *korkeusjana*. Lieriön sivujana yhdistää pohjien vastinpisteet toisiinsa. Voidaan ajatella, että vaippa syntyy näistä sivujanoista.

Lieriön korkeusjana on kohtisuorassa pohjia vastaan. Jos sivujanat ja korkeusjanat ovat samansuuntaiset, niin lieriö on *suora*.



Kuvassa määriteltyjä käsitteitä käytetään jatkossa. Vaikka kuvan lieriöt ovat ympyrälieriöitä, niitten osien nimet pätevät kaikille lieriöille.

Luodaan nyt lyhyt katsaus lieriöitten erikoistapaukseen, *ympyrälieriöön*. Tutkitaan ympyrälieriötä ihan sen itsensä vuoksi, mutta myös muun muassa auttamaan muodostamaan intuitiivinen mielikuva suoran lieriön vaipan alan laskemisesta.

Ympyrälieriö

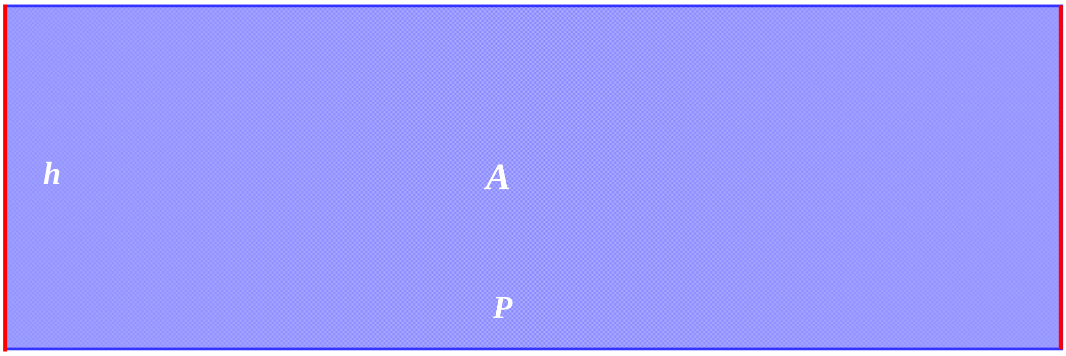
Ympyrälieriön pohjat ovat yhtä suuret ympyrät. Yllä oleva kuva esittää *suoraa ympyrälieriötä* ja *vinoa ympyrälieriötä*. Esimerkiksi bensiinimoottorin sylinteri on lieriön ja nimenomaan *suoran ympyrälieriön* muotoinen.

Kuten huomaat, myös euron kolikko, keittiöpaperirullan pahvinen holkki ja moni peltinen säilyketölkki ovat suoria ympyrälieriöitä.

Kaikille ympyrälieriöille on yhteistä ympyränmuotoiset pohjat. Niitten korkeusjanat ovat kohtisuorassa pohjia vastaan — kuten kaikilla lieriöillä. Ne eroavat siinä, että suoran ympyrälieriön korkeusjana on sivujanan suuntainen ja vinon ympyrälieriön korkeusjana ja sivujana voivat muodostaa keskenään kuinka suuren kulman tahansa. Ei tosin ole mieltä määritellä mainittu korkeusjanan ja sivujanan välinen kulma — vaikkapa α — välin $0 < \alpha < 90$ astetta ulkopuolelle.

Koska ympyrälieriön pohja — on ympyrälieriö sitten vino tai suora — on ympyrä, sen pohjan piiri, merkitään P, on $P = 2\pi r$.

Edellä olevaan suoran ympyrälieriön kuvaan on piirretty sivujana punaisella. Ajattele nyt niin, että leikkaat lieriön auki kuten voit kuvitella, että avaat keittiöpaperirullan pahvisen holkin. Levitä se suoraksi tasoksi. Tuloksena saat jotain seuraavaa kuvaa muistuttavaa.



Kuvan punainen viiva, joka alkuperäisessä lieriön kuvassa esitti sivujanaa ja — koska kyseessä oli suora ympyrälieriö — myös lieriön korkeutta, on nyt tämän uuden suorakulmion korkeusjana. Merkitään sitä tämän hetken roolinsa vuoksi kirjaimella *h*. Uuden suorakulmion kanta on puolestaan alkuperäisen lieriön pohjaympyrän piiri eli $P = 2\pi r$. Täten suoran ympyrälieriön vaipan ala on

$$\begin{aligned} A &= Ph \\ &= 2\pi r h \end{aligned}$$

missä

$$\begin{cases} P = \text{pohjaympyrän piirin pituus} \\ h = \text{lieriön korkeus} \\ r = \text{pohjaympyrän säteen pituus} \end{cases}$$

Ajattele nyt vaikkapa yhtä euron kolikkoa. Lisää sitten sen päälle toinen euron kolikko. Lisää vielä kahdeksan euron kolikkoa, jolloin sinulla on pinossa 10 euron kolikkoa. Sekä yksi euron kolikko että kymmenen tarkasti päällekkäin ladottua euron kolikkoa ovat suoria ympyrälieriöitä. Ilmeisesti kymmenen euron kolikon muodostaman suoran ympyrälieriön tilavuus on kymmenen kertaa yhden kolikon muodostaman suoran ympyrälieriön tilavuus.

Kuinka suuri sitten on yhden euron kolikon tilavuus? Valitse jokin pituusmitta, kuinka pieni tahansa, vaikka nanometrin sadasosa. Leikkaa kolikkosi siivuihin, joiden korkeus on valitsemasi pienen pieni pituusmitta. Alkuperäisen euron kolikon tilavuus on siivujen määrä kertaa yhden siivun tilavuus. Yhden siivun tilavuus on siivun korkeus eli yksi — muista äskeinen yksikönvalinta — kertaa palan pohjan ala: palan pohjan ala on nyt yksikkö samalla tavalla kuin esimerkiksi $1\,mm^2$. Lopulta siis kolikon korkeus eli yksi kertaa yhden palan ala.

Tämä intuitiivinen ajattelu voidaan yleistää suorasta vinoon ympyrälieriöön ja siitä edelleen lieriöön yleensä.

Ympyrälieriön tilavuus on

missä $A_{\text{pohjan ala}}$ on pohjaympyrän ala, r sen säde ja h sen korkeus.

$$\boxed{\begin{aligned} V &= A_{\text{pohjan ala}} \cdot h \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}}$$

Huomaa, että tämä tilavuuden laskukaava pätee myös, kun ympyrälieriö ei ole suora.

Ympyrälieriön kokonaispinta-ala A_{kok} on

$$\boxed{\begin{aligned} A_{kok} &= 2 \cdot A_{\text{pohjan ala}} + A \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{aligned}},$$

kun $A_{\text{pohjan ala}}$ on pohjaympyrän ala, A vaipan ala, r sen säde ja h sen korkeus.

Yleistetään vielä suoran ympyrälieriön tilavuuden laskukaava koskemaan kaikkia <u>lieriöitä</u>: särmiö ja niin edelleen.

Lieriön tilavuus V lasketaan kaavalla

$$\boxed{V = Ah}$$

Tässä A on lieriön pohjan ala ja h on lieriön korkeus. Käytännön vaikeus on lieriön pohjan alan määrääminen, mikäli pohja ei ole jokin ”helppo” kuvio.

Särmiö

Särmiö on lieriö, jonka pohjat ovat monikulmioita. Sen sivuja ja pohjia sanotaan *tahkoiksi* ja sen kahden pohjan — jotka ovat siis monikulmioita — vastinpisteitä yhdistäviä janoja sanotaan sen *särmiksi*. Kaikkien särmiöiden joukosta voidaan löytää seuraavat erikoistapaukset

6 *Suorakulmainen särmiö*: särmien muodostamat kulmat ovat suorat. Esimerkkinä tiili.

6 *Säännöllinen särmiö*: pohjana on säännöllinen monikulmio kuten neliö tai tasasivuinen kolmio.

Mainitsen vielä kaksi erikoistapausta. Ensimmäinen on *kuutio*. Se kuuluu molempiin kahteen yllä olevaan erikoistapausten joukkoon. Toinen erikoistapaus on *prisma*. Prisma on suora särmiö, jonka pohjat ovat kolmioita.

Huomaa, että prisma ei suorakulmainen särmiö.

Suora särmiö voidaan ajatella levitettäväksi auki samalla tavalla kuin suora lieriö. Tällöin muodostuvan suorakulmion kanta on sama kuin suoran särmiön pohjana olevan monikulmion piiri. Merkitään tätä piiriä kirjaimella p, ja olkoon h särmiön korkeus. Saadaan seuraavat laskukaavat:

Suoran särmiön

vaipan ala = $\boxed{A_{\text{vaippa}} = ph}$

kokonaispinta-ala = $\boxed{A_{\text{koko}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohjat}}}$

tilavuus = $\boxed{V = A_{\text{pohja}} \cdot h}$

Huomaa, missä käytetään sanaa ”pohja**t**” ja missä sanaa ”pohja”.

Luetellaan vielä yhteenvedonomaisesti valikoima lieriöitä ja särmiöitä sekä niitä kuvaavia ominaisuuksia.

Suora lieriö

- sivujanat samanpituiset
- sivujanat kohtisuorassa pohjia vastaan
- korkeusjana = sivujana
- avattu vaippa on suorakulmio

Suora ympyrälieriö

- pohjana ympyrä
- sivujanat samanpituiset
- sivujanat kohtisuorassa pohjia vastaan
- korkeusjana = sivujana
- avattu vaippa on suorakulmio

Vino lieriö

- sivujanat samanpituiset
- pohjat samansuuntaiset
- sivujanat eivät kohtisuorassa pohjia vastaan

Suora särmiö

- pohja on monikulmio
- sivujanat samanpituiset
- sivujanat kohtisuorassa pohjia vastaan

- avattu vaippa on suorakulmio

Suorakulmainen särmiö
- pohja on suorakulmio
- sivujanat samanpituiset
- sivujanat kohtisuorassa pohjia vastaan
- avattu vaippa on suorakulmio

Säännöllinen särmiö
- pohja on säännöllinen monikulmio
- sivujanat samanpituiset
- sivujanat kohtisuorassa pohjia vastaan
- avattu vaippa on suorakulmio

Esimerkki 1
Sylinterin halkaisija on 13 cm ja korkeus 12 cm. Laske sen tilavuus.
Ratkaisu
Sylinteri on ympyrälieriö, joten tilavuus saadaan kaavasta $V = \pi r^2 h$. Tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \left(\frac{13cm}{2}\right)^2 \cdot 12cm \\ &= 1600cm^3 \\ &= 1{,}6l \end{aligned}$$

<u>Vastaus</u>: Sylinterin tilavuus on noin 1600 kuutiosenttiä eli 1,6 litraa.

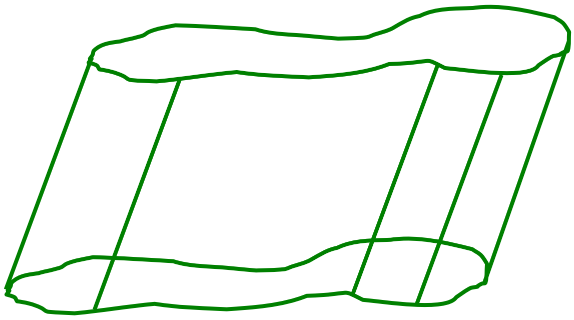
Esimerkki 2
Vinon ympyrälieriön pohjaympyrän halkaisija on 3 mm ja lieriön korkeus 2 mm. Laske sen tilavuus.
Ratkaisu
Kaava on jälleen $V = \pi r^2 h$. Saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \left(\frac{3mm}{2}\right)^2 \cdot 2mm \\ &= 14mm^3 \end{aligned}$$

Vastaus: Vinon ympyrälieriön tilavuus on noin 14 kuutiomilliä.

Esimerkki 3

Oheinen kuva, johon on piirretty myös muutama sivujana, esittää vinoa lieriötä. Sen epämääräisen muotoiset pohjat ovat kuitenkin yhdensuuntaiset, kuten lieriöllä tulee olla. Laske lieriön tilavuus, kun sen korkeus on 12 metriä ja pohjan ala on 348 neliömetriä.



Ratkaisu

Nyt tarvitaan kaavaa $V = A \cdot h$, joten

$$\begin{aligned} V &= 12m \cdot 348m^2 \\ &= 4176m^3 \end{aligned}$$

Vastaus: Lieriön tilavuus on 4176 kuutiometriä.

Jos pohjan alaa ei **Esimerkissä 3** olisi annettu, olisi sen määrääminen ollut melko hankalaa!

Esimerkki 4

Merkitään suorakulmaisen särmiön särmiä kirjaimilla *a*, *b* ja *c*. Silloin sen pohjan ala on *ab* ja korkeus *c*.

Olisimme voineet valita suorakulmaisen särmiön korkeudeksi minkä tahansa särmän pituuden. Tällöin muutkin särmät olisivat vaihtuneet.

Suorakulmaisen särmiön tilavuus V on siis

$$\begin{aligned} V &= Ah \\ &= abc \end{aligned}.$$

Nyt siis A:lla ja h:lla merkitään pohjan alaa ja särmiön korkeutta.

Siis tulos:

Suorakulmaisen särmiön tilavuus lasketaan kaavalla

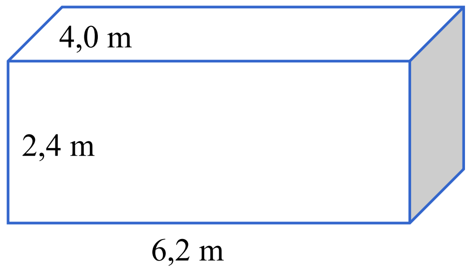
$$\boxed{V = abc}$$

kun sen särmiä merkitään *a:lla*, *b:llä* ja *c:llä*.

Esimerkiksi tavallinen rakennuksissa käytetty seinätiili on suorakulmaisen särmiön muotoinen. Myös mikä tahansa kuutio on suorakulmaisen särmiön muotoinen: valitaan $a = b = c$.

Esimerkki 5

Huoneen mitat ovat 2,4 metriä, 6,2 metriä ja 4,0 metriä. Laske huoneessa olevan ilman massa. Ilman tiheys on 1,2 $\frac{g}{l}$.



Ratkaisu

Koska tiheys ρ määritellään kaavalla

$$\rho = \frac{m}{V},$$

missä *m* on massa ja *V* on tilavuus, massalle saadaan yhtälö

$$m = \rho V .$$

Siis

$$\begin{aligned} m &= 1{,}2 \frac{g}{dm^3} \cdot 2{,}40m \cdot 6{,}20m \cdot 4{,}0m \\ &= 71{,}424kg \end{aligned},$$

sillä litra = dm^3.

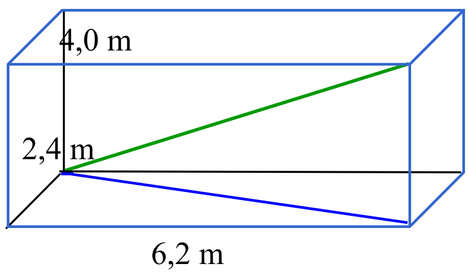
<u>Vastaus</u>: Huoneessa olevan ilman massa on noin 71 kiloa.

Esimerkki 6

Laske **Esimerkin 5** huoneen lävistäjän pituus.

Ratkaisu

Lasketaan ensin lattian lävistäjän neliö. Lattian lävistäjää esittää kuvassa sininen jana. Merkitään sitä kirjaimella *s*. Merkitään huoneen mittoja:



$a = 4{,}0$ m
$b = 2{,}4$ m
$c = 6{,}2$ m.

Pythagoraan lauseen nojalla saadaan

$$s^2 = a^2 + c^2 .$$

Merkitään huoneen lävistäjää kirjaimella *r*. Silloin jälleen Pythagoraan lauseen nojalla

$$r^2 = s^2 + b^2,$$

josta edelleen

$$r = 7{,}8m.$$

<u>Vastaus</u>: Huoneen lävistäjä on noin 7,8 metriä pitkä.

Esimerkin 6 avulla saamme samalla seuraavan tuloksen.

Suorakulmaisen särmiön lävistäjän pituus *r* saadaan kaavasta

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

kun särmiön särmien pituudet ovat *a*, *b* ja *c*.

Esimerkki 7
Laske kaksi metriä pitkän rautatangon paksuus, kun tanko painaa 180 kiloa ja sen poikkileikkaus on ympyrä. Raudan tiheys on 7,87 $\cdot 10^3 \, kg/m^3$.

Ratkaisu

Tangon pituuden ja raudan tiheyden perusteella tangon tilavuudeksi saadaan $\dfrac{180kg}{7{,}87 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}}$. Koska tangon poikkileikkaus on ympyrä, tanko on ympyrälieriön muotoinen. Sen tilavuus V lasketaan siis kaavalla

$$V = \pi r^2 \cdot h,$$

kun r on pohjaympyrän säde ja h on lieriön korkeus. Saadaan yhtälö

$$\pi r^2 \cdot 2m = \frac{180kg}{7{,}87 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}},$$

josta edelleen

$$\text{halkaisija} = 2r = 0{,}12m.$$

Vastaus: Rautatanko on noin 12 senttimetriä paksu.

Esimerkki 8

Anu vertailee esitteen akvaarioita. Hän kiinnostuu lähinnä kahdesta mallista, jotka ovat muuten ihan samanlaiset, mutta eri kokoiset. Toisen tilavuus on 180 litraa ja toisen tilavuus on 230 litraa. Kuinka paljon kasvavat akvaarion pituus, leveys ja syvyys, kun lasin paksuutta ei oteta huomioon ja akvaarion tilavuus kasvaa 180 litrasta 230:een litraan?

Ratkaisu

Tasokuvioitten pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Vastaava tulos pätee myös kappaleille: tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Ajattele vaikka suorakulmaista särmiötä. Sen tilavuus V lasketaan kaavalla $V = abc$, jos sivuja merkitään noilla pikkukirjaimilla. Kerrotaan nyt kukin särmä kertoimella s. Uudet särmät ovat siis sa, sb ja sc sekä uusi tilavuus V_{uusi} on

$$\begin{aligned} V_{\text{uusi}} &= sasbsc \\ &= s^3abc \\ &= s^3V \end{aligned}$$

Saadun tuloksen mukaan siis,

jos särmiön kaikki sivut kerrotaan tai jaetaan luvulla s, niin särmiön tilavuus tulee vastaavasti kerrotuksi tai jaetuksi s^3:lla. Tämä tulos pätee kaikenmuotoisille kappaleille.

Sovelletaan tätä nyt tehtävän akvaarioihin. Olkoot akvaarioitten tilavuudet vaikkapa V_{isompi} ja $V_{pienempi}$. Tällöin $V_{\text{isompi}} = s^3 \cdot V_{pienempi}$, kun käytämme kirjainta s kuten äskeisessä tuloksessa.

Saamme yhtälön

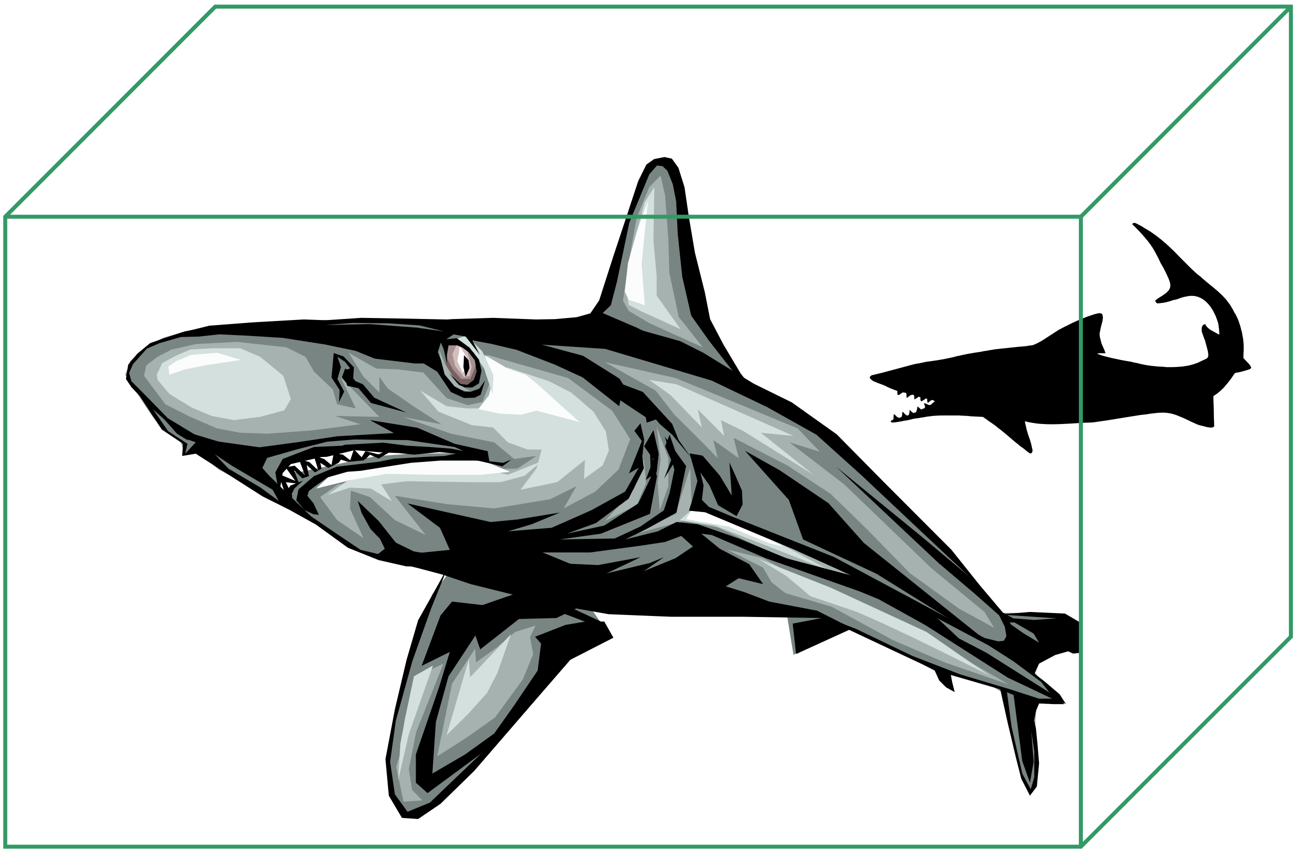
$$230l = s^3 \cdot 180l\,,$$

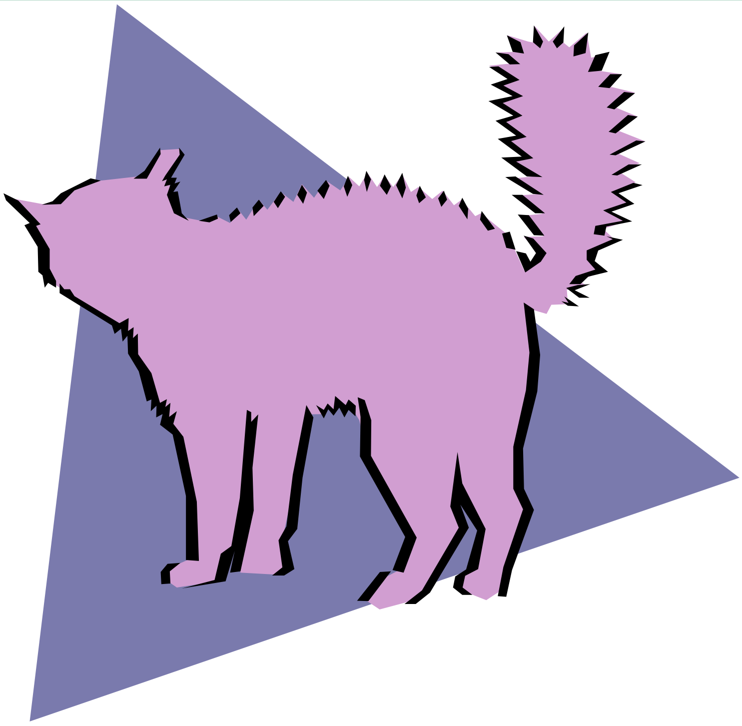
josta

$$s = 1{,}085\,.$$

Näin ollen akvaarion mitat kasvavat 8,5 prosenttia, kun tilavuus kasvaa 180 litrasta 230 litraan.

Vastaus: Akvaarion pituus, leveys ja syvyys kasvavat kukin 8,5 prosenttia.





Kartio

Ajattele mielessäsi ensin mitä tahansa lieriötä. Kuvittele sitten, että toinen lieriötä rajoittavista pohjista kutistuu pisteeksi ja vie vastaavat sivujanojen päät mukanaan. Tällöin syntyy *kartio* tai *pyramidi*.

Voit myös ajatella, että kartio syntyy niin, että valitaan ensin suljettu tasokuvio sekä piste P sen ulkopuolelta. Yhdistetään sitten tasokuvion jokainen piste janalla pisteeseen P niin, että nämä janat eivät leikkaa toisiaan.

Kolmas tapa, jolla nimenomaan suora ympyräkartio voidaan ajatella syntyvän, on antaa jäätelötötteröitten valmistajan tehdä sellainen.

Kartion tärkeitä osia ovat *huippu*, *sivujana*, *pohja* ja *vaippa*. Kartiota kuvaavia tärkeitä suureita ovat *korkeus* ja pohjan mitat. Pohjan mittojen tyypit riippuvat siitä, mikä kuvio kartion pohjana on. Tärkeitä mittoja ovat pohjan ala ja pohjaympyrän säde. Viimeksi mainittu luonnollisesti siinä tapauksessa, että pohjakuvio on ympyrä.

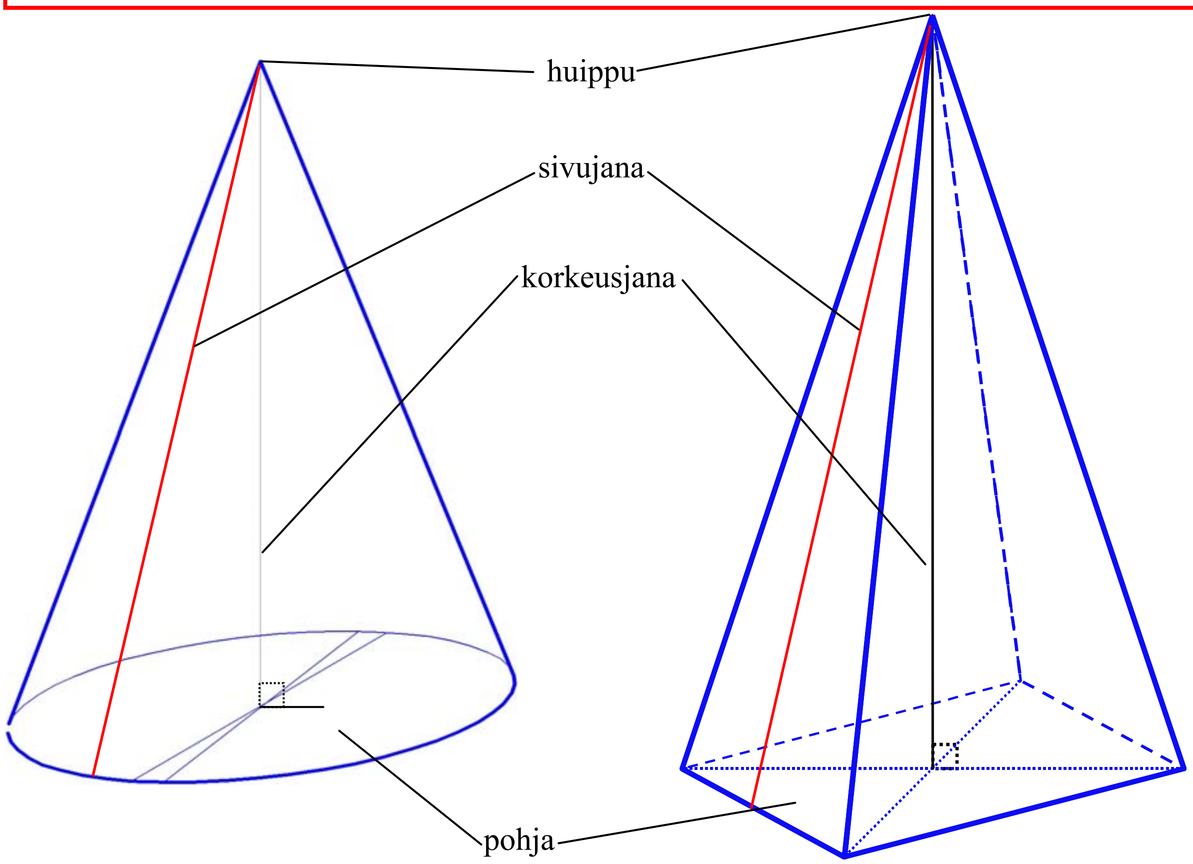
Esitellään nuo luetellut osat vielä piirroksen avulla. Seuraava piirros esittää suoraa ympyräkartiota ja suoraa, säännöllistä pyramidia, jonka pohjakuviona on neliö.

Kartion ja pyramidin tilavuus lasketaan molemmat periaatteessa samalla tavalla. Se on kolmasosa pohjan alan ja korkeuden tulosta.

Kartion ja pyramidin tilavuus V on

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Ah},$$

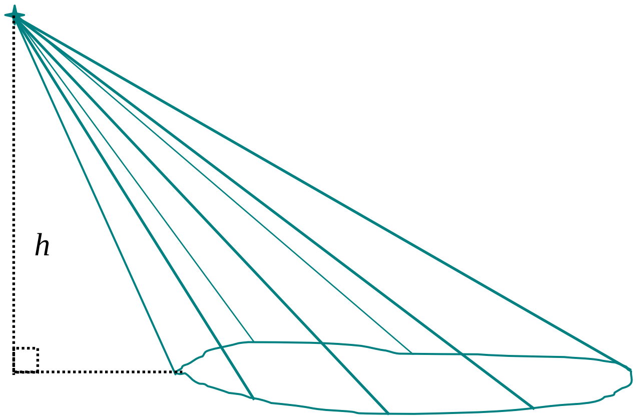
kun A on kyseessä olevan kappaleen pohjan ala ja h on sen korkeus.



Vastaavalla tavalla kuin lieriöitten ja särmiöitten tapauksessa laadin nyt erilaisten kartioitten ja pyramidien ja niitten tyypillisten ominaisuuksien luettelon.

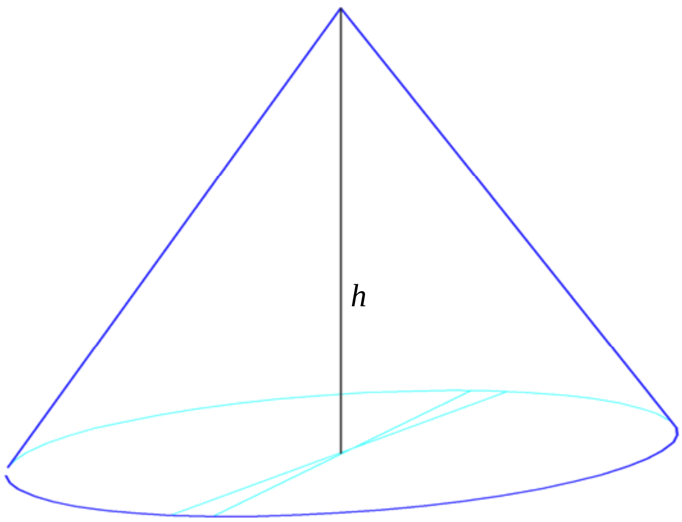
Kartio

- ei erityisiä rajoituksia: pohja on suljettu, yhtenäinen tasokuvio
- sivujanat eivät välttämättä ole yhtä pitkät
- korkeusjana on merkitty oheiseen kuvioon *h:lla* ja se voi olla kartion ulkopuolella



Suora ympyräkartio

- pohjakuvio on ympyrä
- sivujanat ovat yhtä pitkät
- korkeusjana *h* leikkaa pohjan sen keskipisteessä



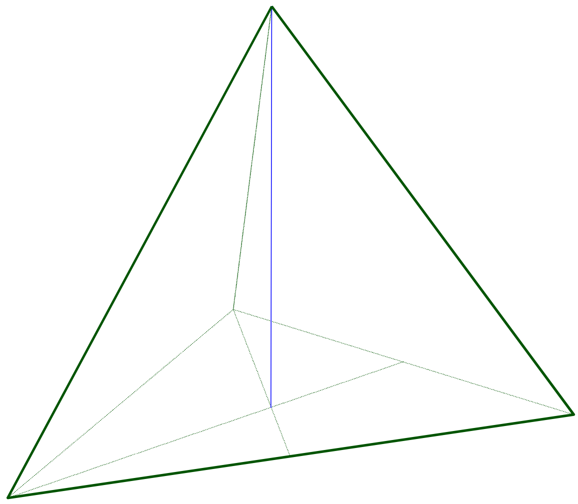
Vino ympyräkartio

- pohjakuvio on ympyrä
- sivujanat ovat eri pituiset

- korkeusjana — kuvassa *h* — voi olla kartion ulkopuolella

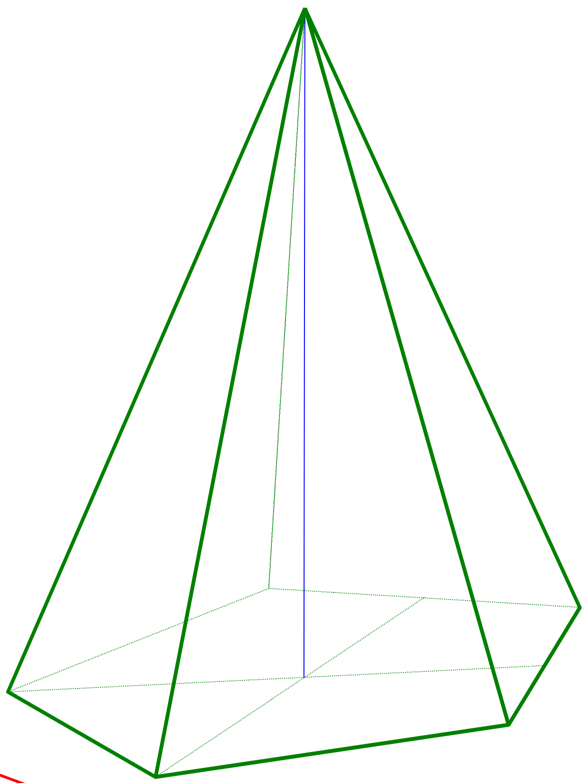
Suora pyramidi

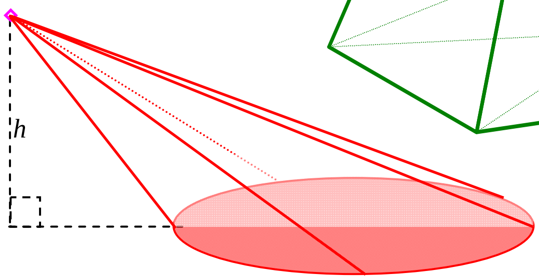
- pohjana monikulmio
- sivujanat ovat erimittaiset
- korkeusjana leikkaa pohjan sen keskipisteessä



Suora, säännöllinen pyramidi

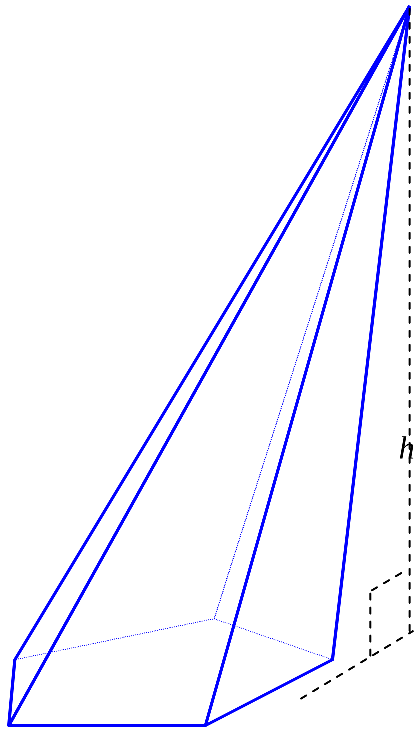
- pohjana säännöllinen monikulmio, kuvassa säännöllinen 5-kulmio
- sivujanat ovat erimittaiset
- korkeusjana leikkaa pohjan sen keskipisteessä





Vino pyramidi

- pohjana monikulmio
- sivujanat ovat erimittaiset
- korkeusjana ei leikkaa pohjaa keskipisteessä



Esimerkki 9

Neliöpohjaisen pyramidin muotoisen teltan korkeus on 185 cm ja sen tilavuus on 2,5 m^3. Laske sen pohjaneliön sivun pituus.

Ratkaisu

Pyramidin tilavuus V on $V = \frac{1}{3}s^2 \cdot h$, missä symbolit on määritelty kuten yleensä. Tästä yhtälöstä saadaan $s = \sqrt{\frac{3V}{h}} \approx 2{,}0$.

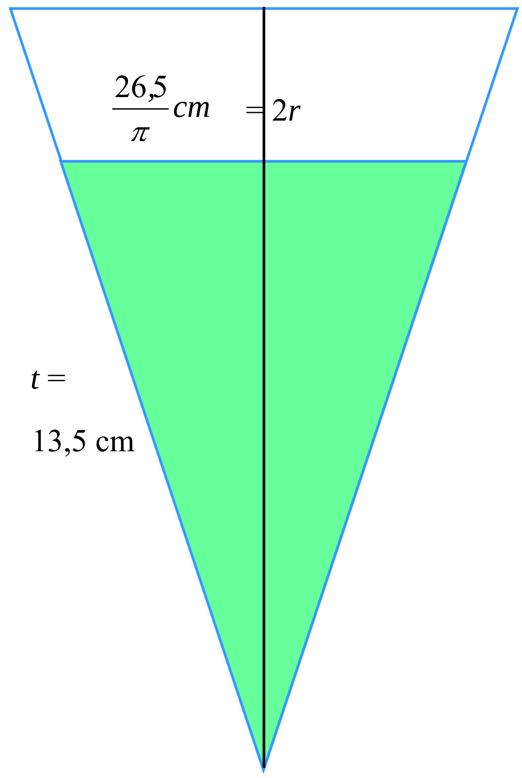
<u>Vastaus</u>: Teltan pohjan sivun pituus on noin kaksi metriä.

Esimerkki 10

Jäätelötötterön sisällön pinta on pohjasta etäisyydellä 80% tötterön korkeudesta. Laske tötterön koko korkeus, kun sisällön ympärysmitta on 26,5 cm ja sen sivujana on 13,5 cm pitkä.

Ratkaisu

Koska sisällön ympärysmitta eli jäätelön pintaympyrän kehän pituus on 26,5 cm, niin sen halkaisijan pituus



saadaan jakamalla tämä π:llä (piirros) ja säde tästä edelleen jakamalla kahdella. Merkitään tätä sädettä *r:llä.*

Merkitään tötterön korkeutta *h:lla* ja sisällön korkeutta *s:llä*. Merkitään sisällön pinnan sivujanaa *t:llä*.

Ajatellaan tasoa, jossa tötterön korkeusjana on sekä kahta suorakulmaista kolmiota, jotka ovat tässä tasossa: koko tötterön puolikas sekä puolikas siitä kolmiosta, jonka sisältö tasolle määrittelee. Koska sisällön korkeus on 80 % tötterön korkeudesta, niin

$$\frac{s}{h} = 0{,}8 \,.$$

Pythagoraan lauseen nojalla saamme myös

$$t^2 = r^2 + s^2 \,,$$

mistä

$$s = \sqrt{t^2 - r^2} \,.$$

Koska $s = 0{,}8h$, niin

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{t^2 - r^2}}{0{,}8} \\ &= 16cm \end{aligned}$$

<u>Vastaus</u>: Tötterön korkeus on 16 cm.

Kartion pohjan ja vaipan ala

Mikäli kartion pohjakuvio on monikulmio, niin kartion vaippa koostuu kolmioista ja kartion vaipan ala on näitten kolmioitten alojen summa.

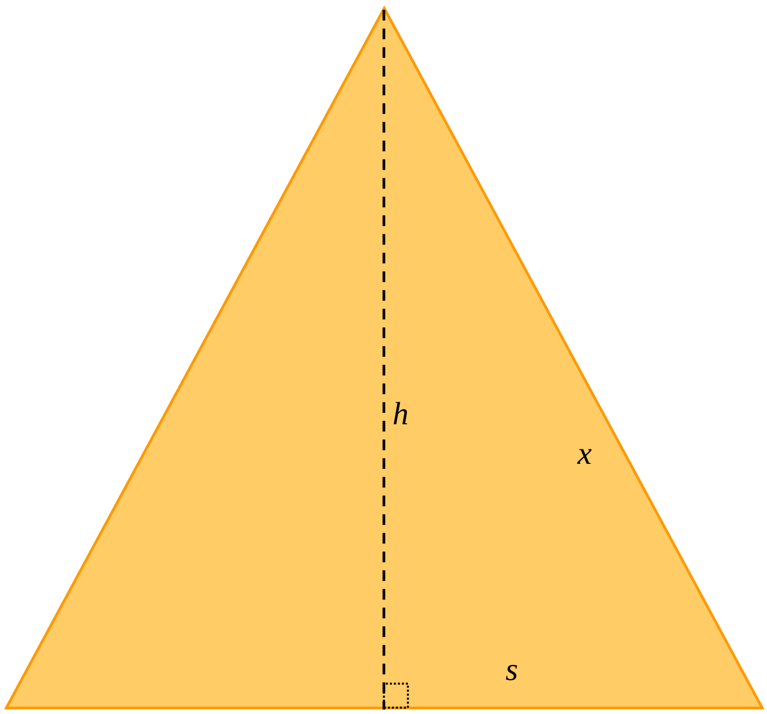
Esimerkki 11

Kuinka paljon telttakangasta tarvitaan **Esimerkin 9** teltan valmistamiseen, kun saumat ja muu sen kaltainen jätetään laskujen ulkopuolelle?

Ratkaisu

Pyramidin vaipan alan laskemiseksi tarvitaan sivukolmion korkeus. Koska kyseessä on säännöllinen, neliöpohjainen pyramidi, niin sen korkeusjana kulkee teltan pohjaneliön keskipisteen kautta. Piirretään kuva, jossa näkyy teltan poikkileikkaus korkeusjanaa pitkin.

Merkitään kuvassa teltan korkeutta kirjaimella h, pohjaneliön sivun puolikasta *s:llä* ja sivukolmion korkeutta *x:llä*.



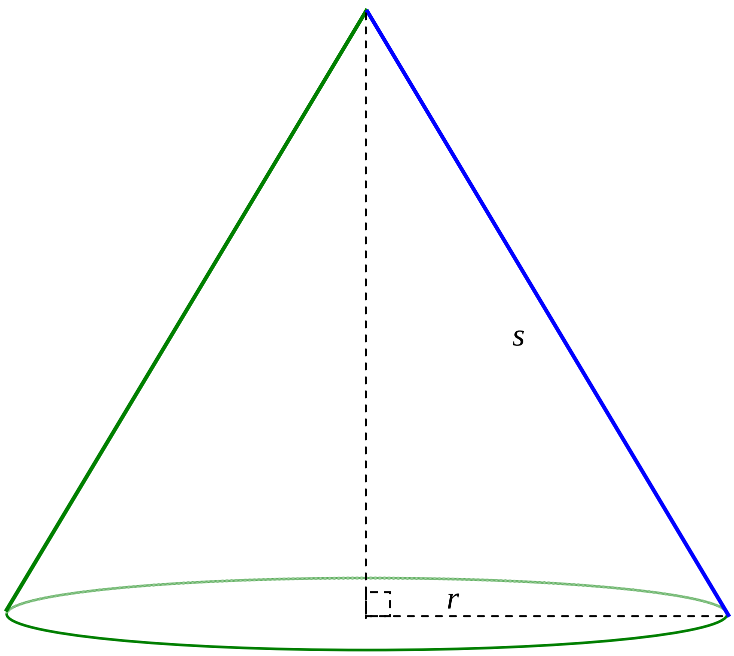
Pythagoraan lauseen nojalla kuvan merkinnöin on $x=\sqrt{h^2+s^2}$. Koko pyramidin vaipan ala A on siis

$$
\begin{aligned}
A &= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2s+(2s)^2\\
&= 4\cdot\sqrt{h^2+s^2}\cdot s+4s^2\\
&= 12{,}4m^2
\end{aligned}
$$

Käytin teltan pohjaneliön sivun s lukuarvona **Esimerkin 9** tulosta 2 metriä.

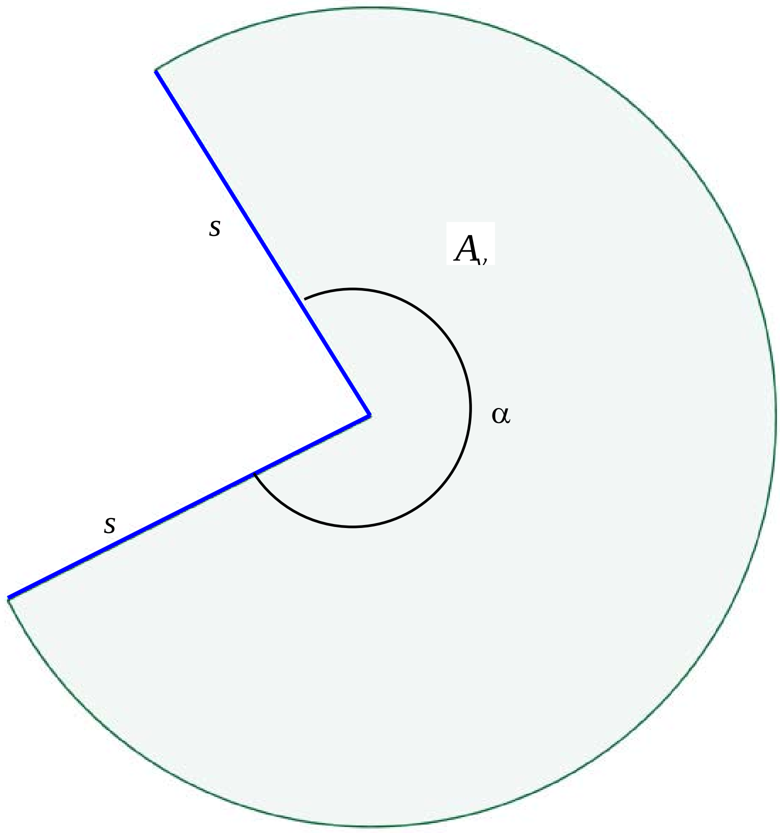
Vastaus: Telttakangasta tarvitaan noin 12 neliömetriä.

Tarkastellaan vielä suoraa ympyräkartiota ennen tämän luvun viimeistä aihetta, palloa.
Olkoon suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde *r* ja sivujana *s*.



Suoran ympyräkartion vaipan alan voi laskea ”levittämällä vaippa auki” eli tasoksi ja tulkitsemalla tämä aukaistu vaippa ympyrän sektorina. Merkitään vaipan alaa A_v :llä.

Puheena olevan ympyrän sektorin kaari on alkuperäisen kartion pohjaympyrän kehä, mikä puolestaan on $2\pi r$. Merkitään sitä vastaavaa keskuskulmaa α :lla. Sektorin ympyrän säde on vaipan sivujana eli koko ympyrän ala on πs^2 .



Kirjoitetaan sektorin kaaren pituus kahdella tavalla ja merkitään yhtä suuriksi. Silloin saamme yhtälön, joka osoittautuu hyödylliseksi. Toinen tapa on jo mainittu: pohjaympyrän kehähän on sektorin kaaren pituus eli sektorin kaaren pituus on $2\pi r$. Toisaalta sektorin kaaren pituus on $\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi s$. Siis

$$
\begin{aligned}
2\pi r &= \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi s \quad \Big| : 2\pi \\
r &= \frac{\alpha}{360°}\cdot s \quad \Big| : s \\
\frac{r}{s} &= \frac{\alpha}{360°}
\end{aligned}
$$

Nyt saadaan kartion vaipan ala A_v, joka kuvan merkinnöin ja nimin on sektorin ala eli

$$
\begin{aligned}
A_v &= \frac{\alpha}{360°}\cdot \pi s^2 \\
&= \frac{r}{s}\cdot \pi s^2 \\
&= \pi r s
\end{aligned}
$$

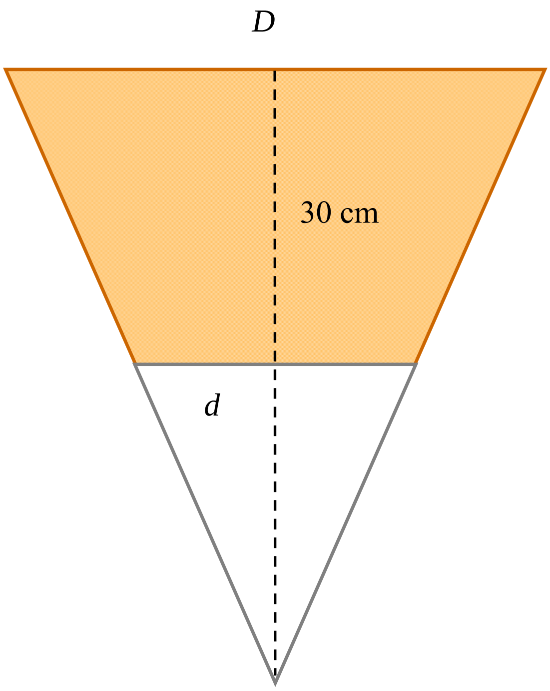
Jos pohjaympyrän sädettä merkitään kirjaimella *r* ja kartion sivujanaa kirjaimella *s*, niin

suoran ympyräkartion vaipan ala on

$$\boxed{A_v = \pi r s}$$

ja **suoran ympyräkartion koko pinta-ala** on

$$\boxed{\begin{aligned} A_{\text{koko}} &= A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}} \\ &= \pi r s + \pi r^2 \end{aligned}}$$



Esimerkki 12

Roskis on katkaistun ympyräkartion muotoinen. Sen suuaukon halkaisija *D* on 45 cm, pohjan halkaisija *d* on 25 cm ja sen korkeus on 30 cm. Laske roskiksen tilavuus litroina.

Ratkaisu

Lasketaan roskiksen tilavuus niin, että vähennetään ehjän ympyräkartion tilavuudesta katkaistun osan tilavuus. Merkitään roskiksen tilavuutta *V:llä*.

Merkitään ehjän kartion korkeutta *x:llä*. Yhdenmuotoisten kolmioitten ominaisuuksien nojalla saadaan

$$\frac{D}{d} = \frac{x}{x-30}$$

eli

$$\frac{45}{25} = \frac{x}{x-30},$$

josta

$$x = 67{,}5 \text{ cm}.$$

Siis $V = \frac{1}{3}\pi\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 x - \left(\frac{d}{2}\right)^2 (x-30)\right) cm^3 = 29648\, cm^3$ eli suunnilleen 30 litraa.

<u>Vastaus</u>: Roskiksen tilavuus on noin 30 litraa.

Pallo

Pallo on varmaan erityisen myönteisellä tavalla kaikille tuttu kappale. Sen lisäksi pallo on kaksiulotteisen ympyrän yleistys kolmeen ulottuvuuteen. Pallo on toisin sanoen avaruudessa paljon sama asia kuin ympyrä on tasossa.

Pallopinta määritellään kolmiulotteisessa avaruudessa samalla tavalla kuin ympyräviiva kaksiulotteisessa: pallopinta on niitten pisteitten joukko, jotka ovat tietyllä samalla etäisyydellä kiinteästä pisteestä.

Esimerkki 13

Ajatellaan katonrajassa paikallaan olevaa ilmapalloa. Sen säde on vaikkapa 25 senttiä ja ajatellaan, että se on ihan huoneen nurkassa. Silloin sen keskipiste on 25 sentin etäisyydellä katosta ja molemmista seinistä. Annetaan tälle tyhjässä ilmassa olevalle pisteelle nimi P: mainittu piste on olemassa myös silloin kun pallo ei ole siinä. Ilmapallo oli vain eräs tapa määritellä juuri tuo piste.

Voimme määritellä pallopinnan niin, että se on niitten pisteitten joukko, jotka ovat tasan 25 sentin etäisyydellä pisteestä P. Kun ilmapallo on mainitussa paikassa, niin olemme määritelleet pallopinnan, joka ainakin suunnilleen noudattaa ilmapallomme pintaa.

Pallon tilavuus ja pinta-ala

Pallon säde on se etäisyys, jolla pallopinnan pisteet ovat sen keskipisteestä ja *pallon halkaisija* on kaksi sädettä. Janaa, joka yhdistää pallopinnan kahta pistettä sanotaan *jänteeksi*. Tällöin esimerkiksi jokin valittu halkaisija on eräs esimerkki jänteestä. Säde taas ei ole jänne, koska sen toinen päätepiste on pallon keskipisteessä eikä pallonpinnalla.

Pallon tilavuus V ja pinta-ala A riippuvat säteestä r seuraavien yhtälöiden esittämällä tavalla.

Pallon tilavuus:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Pallon pinta-ala:

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

Kuten aina pyöreitten olioitten tapauksessa, myös pallon kaavoissa esiintyy π. **Huomaa** myös, että tilavuus edellyttää jälleen pituusmitan kolmatta potenssia eli *säde kolmanteen* ja pinta-ala pituusmitan toista potenssia eli *säde toiseen*.

Eräs pallon erityisominaisuuksista muihin kappaleisiin verrattuna on, että se sulkee mahdollisimman ison tilavuuden mahdollisimman pienen pinta-alan sisään. Tällä on merkitystä muun muassa materiaalikustannuksissa ja lämpötaloudessa.

Esimerkki 14

Pallon massa on 63 tonnia ja säde 2,5 metriä. Kelluuko se vedessä?

Ratkaisu

Lasketaan pallon tilavuus ja siitä edelleen massan avulla pallon tiheys. Pallo kelluu vedessä ja jos se painetaan pohjaan, se nousee taas pinnan tuntumaan, jos sen tiheys on vähemmän kuin yksi gramma kuutiosenttiä kohti eli jos sen tiheys on pienempi kuin veden tiheys.

Tiheys ρ on massa jaettuna tilavuudella eli

$$\rho = \frac{m}{V},$$

kun *m* on massa. Siis

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{63 \cdot 10^6 g}{\frac{4}{3}\pi \cdot (250cm)^3} \\ &= 0{,}96\frac{g}{cm^3} < 1\frac{g}{cm^3}\end{aligned}$$

Pallo siis kelluu. Pinnan yläpuolelle siitä tosin näkyy aika vähän, mutta koska se pysyttelee sitkeästi ainakin vähän näkyvissä, niin sanomme, että kyllä se kelluu.

<u>Vastaus</u>: Pallo kelluu vedessä.

Esimerkki 15

Pallo on täynnä vettä. Sen alimmassa pisteessä on reikä, josta vesi valuu nopeudella yksi litra 15 sekunnissa. Pallon tyhjeneminen kestää 2 h 10 min 54 s. Laske pallon halkaisija.

Ratkaisu

Koska 2 h 10 min 54 s = 7 854 s, niin pallon tilavuus on

$$V = 7854s \cdot \frac{l}{15s} = 523{,}6l.$$

Pallon säde saadaan ratkaisemalla *r* yhtälöstä

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

siis

$$\begin{aligned}r &= \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7854s \cdot \frac{l}{15s}}{4\pi}},\end{aligned}$$

joten *r* = 0,5 m ja halkaisija on siis yksi metri.

Vastaus: Pallon halkaisija on yksi metri.

Esimerkki 16

Kuinka paljon merenpinta nousee, jos Grönlannin jäät sulavat? Maapallon säde on 6367,5 km. Oletetaan, että Maan pinnasta on 70% veden alla ja että jään sulamisen aiheuttama veden osuuden kasvu alasta on pienempi kuin annettujen lukujen epätarkkuus. Oletetaan lisäksi, että Grönlannissa on jäätä kolme miljoonaa kuutiokilometriä, joka sulaessaan valuu mereen. Jään tiheys on 0,917 $\frac{g}{cm^3}$ ja veden 1,000 $\frac{g}{cm^3}$.

Ratkaisu

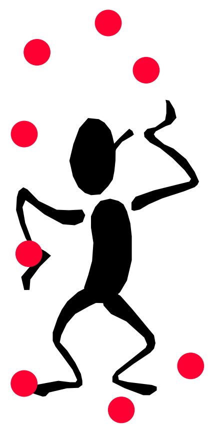
Pallon ala on $A = 4\pi r^2$. Maan tapauksessa tästä on veden alla 70%. Koska me oletamme — vähän rohkeasti — että tämä 70 prosentin osuus ei kasva, vaikka vesimäärä kasvaa, niin ilmoitettu jään määrä nostaa pintaa tällä alalla. Merkitään pinnannousua ΔS:llä:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{0{,}9 \cdot \text{jään määrä}}{0{,}7 \cdot 4\pi r^2} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^6 km^3}{0{,}7 \cdot 4\pi \cdot (6367{,}5 km)^2} \\ &= 7m\end{aligned}$$

Ensimmäisessä yhtälössä esiintyvä luku 0,9 on pyöristetty jään tiheys.

Vastaus: Vesi nousee 7 metriä.

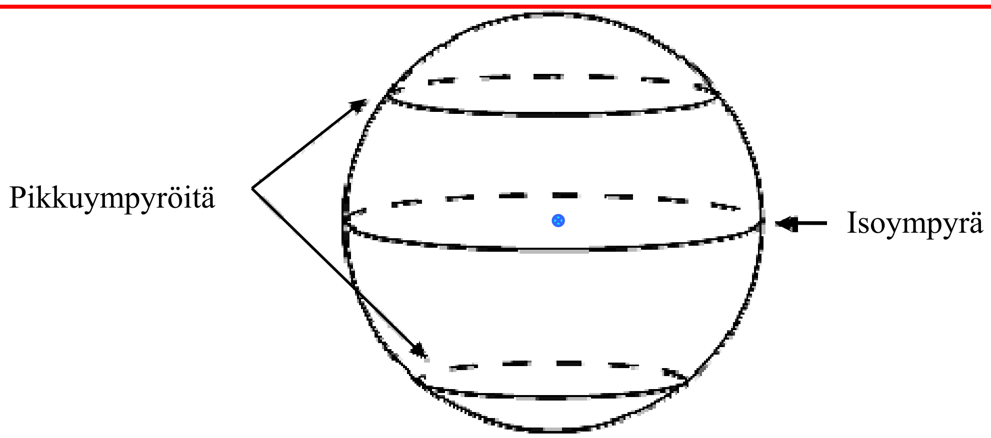
Huomaa, että jään massa on yksi gramma jokaista vesigrammaa kohti, mutta että yhden jäägramman tilavuus on enemmän kuin yksi kuutiosentti.



Maapallon pituus- ja leveyspiirit

Koska on välttämätöntä voida mitata sijainti maanpinnalla yksikäsitteisesti ja tavalla, joka on sama koko maailmassa, maapallon pinnalle on määritelty koordinaattijärjestelmä. Sen koordinaatit ovat *pituus-* ja *leveyspiirit*. Näitä koordinaatteja yhdessä sanotaan usein *maantieteellisiksi koordinaateiksi*. Tämän järjestelmän määrittelyn kannalta *isoympyrän* käsite on tärkeä.

Isoympyrä on ympyrä, joka muodostuu, kun pallon keskipisteen kautta kulkeva taso ja pallon pinta leikkaavat toisensa.



Pituuspiiri on isoympyrä, joka syntyy sen tason ja Maan pinnan leikkausviivana, jossa tasossa Maan pyörimisakseli on.

Muut leveyspiirit paitsi päivätasaaja eli ekvaattori **eivät** ole isoympyröitä. Määrittelen nyt leveyspiirit ekvaattorin avulla.

Ekvaattori on isoympyrä, jonka taso on kohtisuorassa Maan akselin kanssa. Aiheesta on kuva hieman myöhemmin. Ekvaattori eli nollas leveyspiiri on ainoa leveyspiiri, joka on isoympyrä. Muut leveyspiirit ovat ympyröitä — mutta **eivät** isoympyröitä — joiden määrittelemät tasot ovat ekvaattorin tason suuntaiset.

Kukin *leveyspiiri* on ympyrä, joka on ekvaattorin suuntaisessa tasossa.

Pallon pinnalle piirretty ympyrä, joka ei kulje pallon keskipisteen kautta, on *pikkuympyrä*.

Kuten kaikki koordinaatistot, myös pituus- ja leveyspiirien järjestelmä tarvitsee kiinteän referenssin, jonka suhteen pisteen koordinaatit mitataan. Niinpä leveyspiirikin mitataan päiväntasaajan suhteen eli leveyspiirin referenssi on päiväntasaaja.

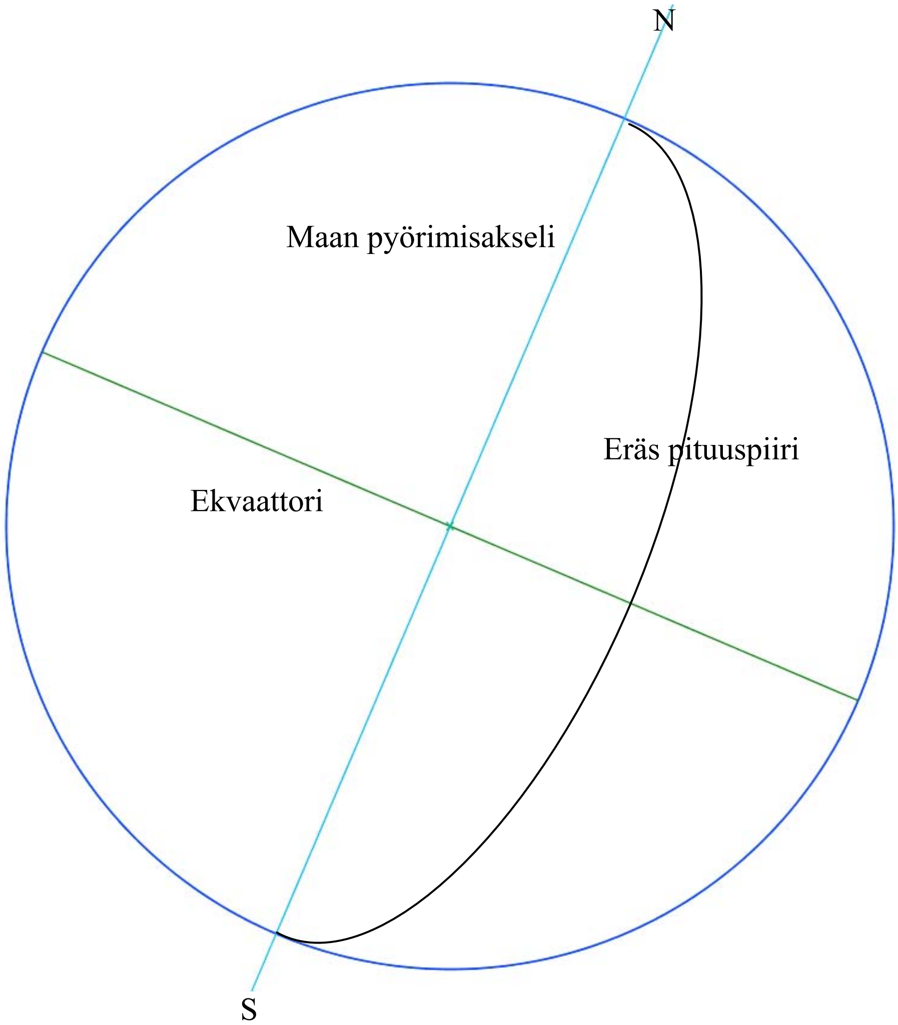
Leveyspiiriksi 0° määritellään eli sovitaan päiväntasaaja.

Muut leveyspiirit mitataan ekvaattorista pohjoiseen ja etelään. Ne voivat saada arvoja 0 asteesta 90 asteeseen *pohjoista leveyttä* tai 0 asteesta 90 asteeseen *eteläistä leveyttä*. Yleisesti näistä asioista puhuttaessa käytetään termiä *leveys* tai *leveysaste*. Katso **Palloon liittyvää harjoitusta 4**.

Nollas pituuspiiri määriteltiin 1800 –luvulla niin, ankaran kädenväännön jälkeen tietenkin, että se tuli kulkemaan Greenwichin — nyt jo vanhan — observatorion kautta.

Nollas pituuspiiri eli *Greenwich'in nolla-meridiaani* kulkee Greenwichin (Lontoossa) kautta ja sen päätepisteet ovat pohjoisnavalla ja etelänavalla.

Pituuspiiri saa arvoja 0º … 180º läntistä pituutta tai 0º … 180º itäistä pituutta. Yleisesti tässä yhtey-



dessä käytetään termiä *pituus* tai *pituusaste* tai *meridiaani*. Koska pisteen pituuden lukuarvo on välillä [0º;180º], käytännössä tarkastellaan isoympyrän puolikkaita. **Katso** (jotain) **karttaa!** Seuraa esimerkiksi nollatta meridiaania tai 23. meridiaania itäistä pituutta eli pituuspiiriä 23º itäistä pituutta pohjoisnavan yli.

Yllä olevassa piirroksessa Maan pyörimisakseli on vinossa. Tämä johtuu siitä, että halusin piirtää Maan niin kuin se aurinkokunnassa kiertää: sen pyörimisakseli on 23,5º kulmassa ratatasonsa kohtisuoraa vastaan eli Maan ekvaattori on 23,5º vinossa ratatasoon nähden. Tämä aiheuttaa muun muassa napapiirit ja kääntöpiirit. Piirroksessa kylmän sininen viiva esittää pyörimisakselia ja vihreä ekvaattoria. Musta kaari on eräs pituuspiiri. Kirjaimet N ja S tarkoittavat napoja.

Pisteen *pituus* tai *pituusaste* on pisteen kulmaetäisyys *Greenwich'in nolla-meridiaanista*.

Huomaa, että maantieteelliset koordinaatit ilmoitetaan joko desimaalimuotoisina asteina tai asteina (symboli: º), (kaari)minuutteina (symboli: ') ja (kaari)sekunteina (symboli: "). Englanniksi ne ovat vastaavasti *degree of arc*, *minute of arc* ja *second of arc*.

1º = 60 ' = 3600 "
1' = 60 "

Esimerkki 17

Turun sijainti on 60º 27’ pohjoista leveyttä ja 22º 16’ itäistä pituutta. Utsjoen sijainti on 69º 54’ pohjoista leveyttä ja 27º itäistä pituutta. Turun ja Utsjoen välimatka suoraan pohjois-etelä –suuntaan on siis 9º 27’ ja suoraan itä-länsi –suuntaan 4º 44’.

Esimerkki 18

Kuinka pitkä matka on Salosta päiväntasaajalle, kun Maan säde on 6367,5 kilometriä?

Ratkaisu

Haen elektronisesta kartasta Salon kaupungin ja siirrän hiiren sen kohdalle. Käyttämäni karttaohjelma ilmoittaa kohdistimen sijainnin. Luen leveyspiirin. Se on 60º 23’ 12,53”.

Oho! Hiiri heilahtaa vähän, mutta kohdistin on edelleen Saloa esittävässä punaisessa pyörylässä. Kohdistimen leveyspiiri on nyt 60º 24’ 23,24”. Leveyspiiri kasvoi yli kaariminuutilla! Ja kartan punainen punaisen pyörylä ei edes ole tarkalleen Salon kokoinen, vaan pienempi.

Pyörylä osoittaa vain paikan. Salon tapauksessa ainakaan kaariminuuttia parempi tarkkuus ei ole mielekäs.

Päätetään Salon maantieteellisiksi koordinaateiksi 60º 24’ pohjoista leveyttä. Tämä merkitsee sitä, että Salon *kulmaetäisyys* päiväntasaajasta on 60º 24’. Tehtävänä on siis laskea kulmaa 60º 24’ vastaavan sektorin kaaren pituus. Merkitään sitä kirjaimella *s*.

$$\begin{aligned} s &= \frac{60°24'}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6367{,}5km \\ &= 6712km \end{aligned}$$

<u>Vastaus</u>: Salosta on matkaa päiväntasaajalle noin 6700 km.

Huomaa, että Salon etäisyydeksi päiväntasaajasta saatu lukuarvo on aika lähellä Maan säteen lukuarvoa. Mutta niin on myös 60º 24’ lähellä 60 astetta, joka puolestaan on säännöllisen 6-kulmion jokaisen kulman, siis myös sen keskuskulman, arvo.

Esimerkki 19

Jos leveysaste tai pituusaste muuttuu yhdellä kaariminuutilla, niin kuinka paljon muuttuu sijainti maastossa?

Ratkaisu

Koska <u>pituusasteen ilmaiseman asteen ja sen osien pituudet riippuvat leveyspiiristä</u>, tehtävän tähän kysymykseen ei ole yhtä ainoaa vastausta. Lasketaan **esimerkkinä** kaariminuutin vaikutus ekvaattorilla ja sen suuntaan.

Ekvaattorin pituus on kaksinkertainen piin ja Maan säteen tulo ja yksi kaariminuutti on tästä yksi $360 \cdot 60 = 21600$. osa eli

$$\text{Ekvaattorilla: } 1'' \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi \cdot 6367{,}5km}{360 \cdot 60} = 1{,}852km\,.$$

Pituusyksiköissä mitattua matkaa, joka mitattuna kulmamitoissa pitkin isoympyrää vastaa yhtä kaariminuuttia, sanotaan *meripeninkulmaksi* (lyhennetään *mpk*; engl. *nautical mile*).

Solmu (engl. *knot*) on nopeuden yksikkö ja suuruudeltaan yksi meripeninkulma tunnissa.

Kolmiulotteisessa avaruudessa kahden pisteen välinen lyhin etäisyys on näitä pisteitä yhdistävä jana. Jos nämä pisteet ovat pallon pinnalla, mutta matka suoraan pisteestä toiseen sallitaan, tätä janaa sanotaan *jänteeksi*. Jos rajoitutaan pallon kaksiulotteiseen pintaan eikä mainittu oikotie ole mahdollinen, kuten asian laita Maan päällä yleensä on, niin kahden pisteen välinen lyhin etäisyys on matka pisteestä toiseen pitkin isoympyrää, joka kulkee molempien pisteitten kautta ja jonka taso kulkee pallon keskipisteen kautta.

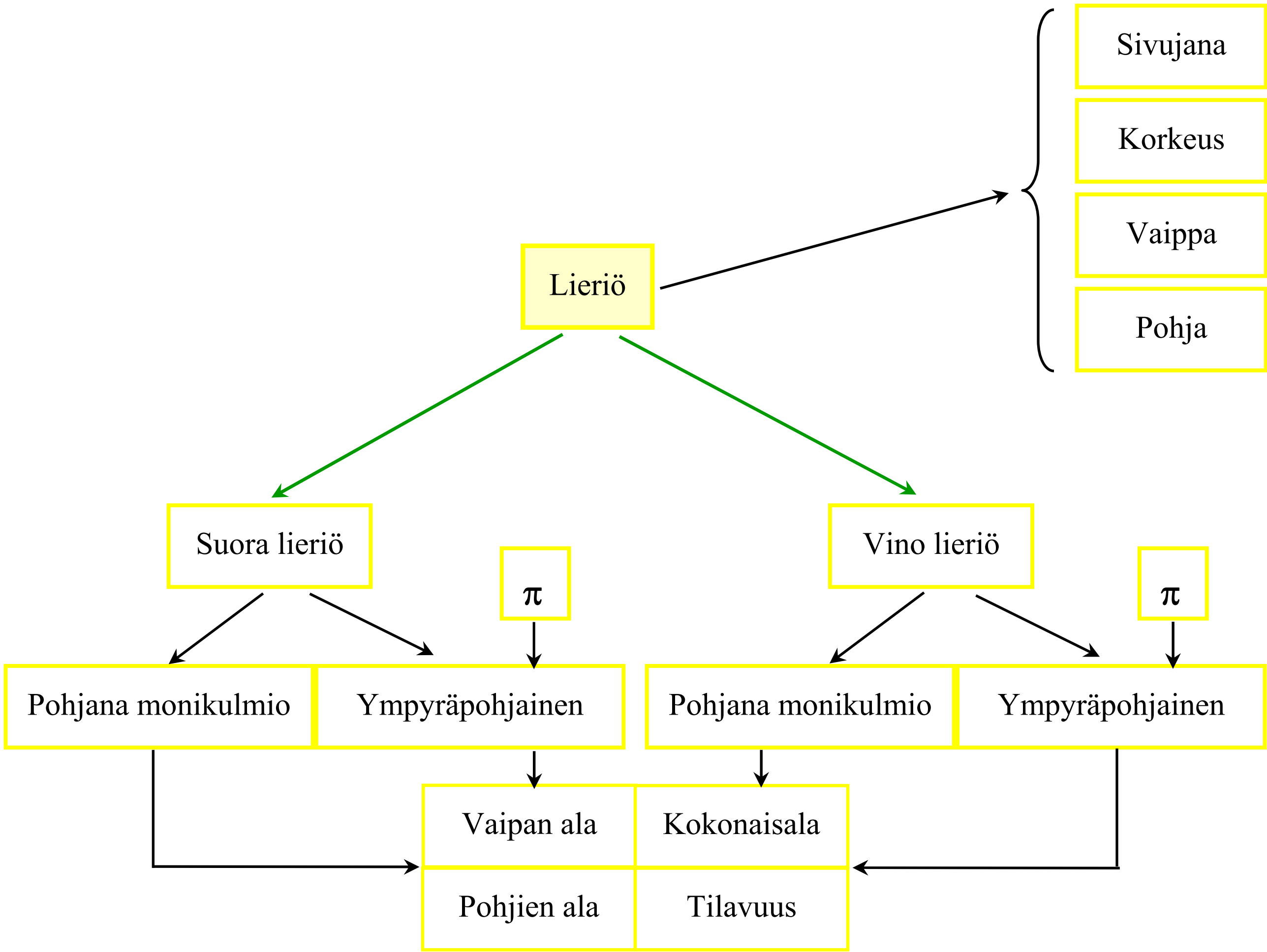
Aikavyöhykkeet

Koska aikanaan arveltiin, että on mukava, jos kaikkialla on esimerkiksi keskipäivä kello 12 tai että kaikkialla vuorokausi vaihtuu keskiyöllä, niin määriteltiin *paikallisen ajan käsite*. Tämäkään ei kuitenkaan ole käytännöllistä, jos kellonaika on eri jopa kaikilla vierekkäisillä kylillä. Siksi päätettiin tehdä kompromissi. Maailma jaettiin *aikavyöhykkeisiin*, joiden pääsääntö on se, että kukin aikavyöhyke on tunnin mittainen — tai levyinen!

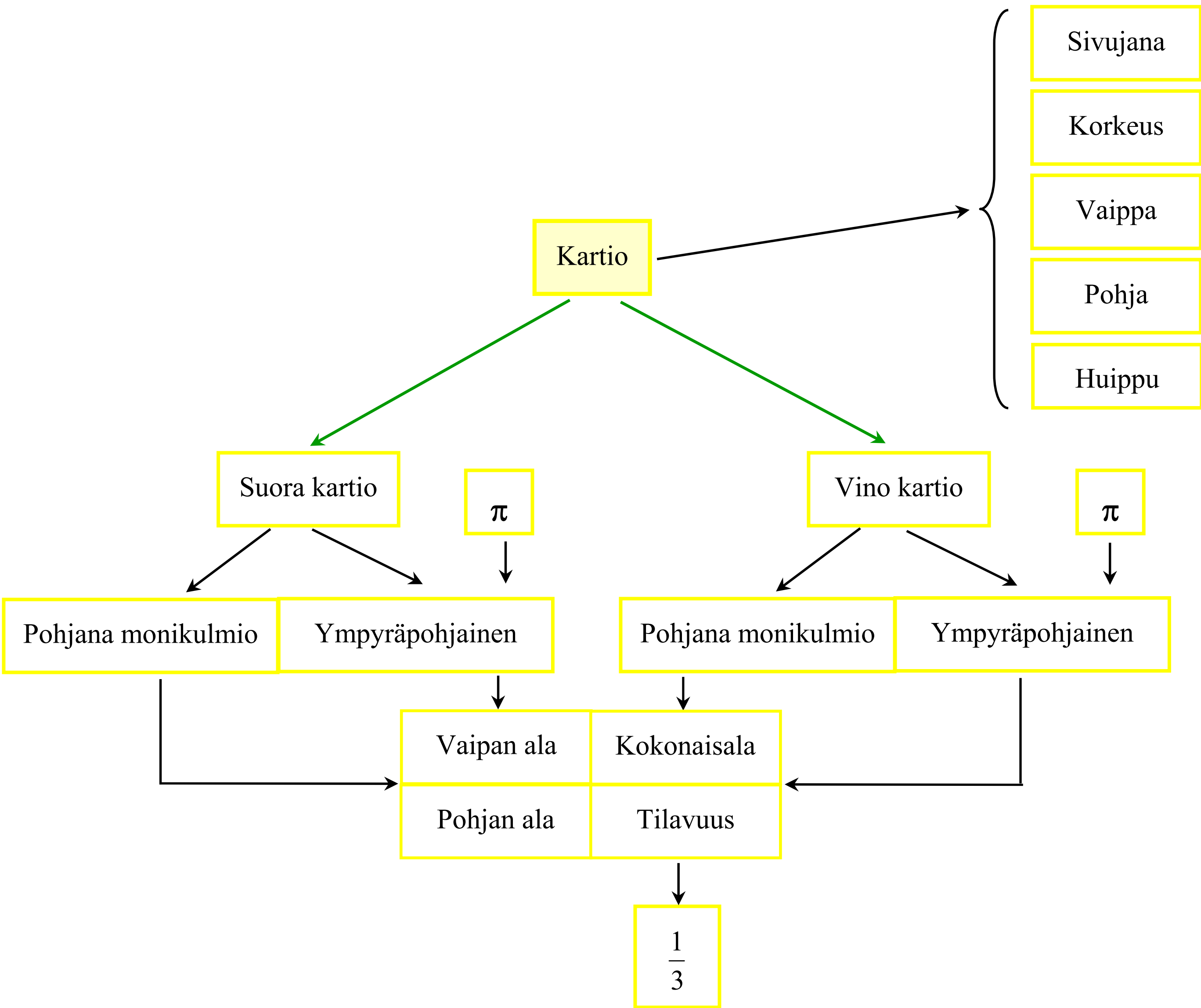
Esimerkiksi kello on Tukholmassa tunnin vähemmän kuin Helsingissä ja Helsingissä puolestaan tunnin vähemmän kuin Pietarissa. Tästä yhden tunnin säännöstä tingitään, kun se on järkevää. Esimerkiksi kello on Suomessa sama koko valtakunnan alueella, mutta toisaalta esimerkiksi Venäjällä ja Yhdysvalloissa ja muissa isoissa maissa on valtakunnan sisäisiä aikavyöhykkeitä, jotka noudattavat erilaisia luonnollisia rajoja eivätkä siis aina pelkästään valtakunnan rajaa.

Koska aikavyöhykkeet ovat viime kädessä seurausta Maan pyörimisestä akselinsa ympäri niin, että Aurinko näyttää liikkuvan taivalla, niin aikavyöhykkeet ovat sukua pituuspiireille. Koska vuorokaudessa on 24 tuntia, niin yksi tunti ajassa merkitsee $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ pituuspiirien erossa. Tästä osaltaan johtuu sekin, että leveyspiirit eivät ole isoympyröitä.

Keskeisiä käsitteitä: lieriö



Keskeisiä käsitteitä: kartio



Keskeisiä käsitteitä: pallo